Die Klassifikation der Kurven zweiter Ordnung und zweiter Klasse bei Plücker.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Friedrich Voß
aus Wustrow.

Rostock i. M.
Carl Hinstorffs Buchdruckerei (E. Erichson)
1912.

Referent: Herr Prof. Dr. Staude.

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit gewidmet.

Einleitung.

Die allgemeine Gleichung der Linien 2. Klasse in Linienkoordinaten wurde zuerst von Plücker aufgestellt. Ihm verdankt man auch die erste Klassifikation der in dieser allgemeinen Gleichung enthaltenen Linien 2. Klasse. Auch der Inhalt der allgemeinen Gleichung der Linien 2. Ordnung in Punktkoordinaten konnte erst nach Einführung der homogenen Koordinaten durch Plücker erschöpfend festgestellt werden.

Indessen sind die grundlegenden Untersuchungen von Plücker, in den beiden Bänden der „Analytisch-geometrischen Entwickelungen“ von 1828 und 1831, einerseits wegen ihres Umfanges und andrerseits wegen der äußerst unvorteilhaften Bezeichnungsweise, deren Beseitigung erst durch die gleichzeitigen Untersuchungen von Cauchy angebahnt wurde, sehr schwer benutzbar gemacht.

Es dürfte daher ein dankenswertes Unternehmen sein, die Plückerschen Entwickelungen, besonders soweit sie die erste Quelle für die Einteilung der Kurven 2. Ordnung und 2. Klasse bilden, in eine der heutigen Bezeichnungsweise angepaßte Form zu bringen. Erst dadurch wird ihr historischer Anspruch zur dauernden Geltung kommen.

In diesem Sinne ist im 1. Teil der vorliegenden Abhandlung die Plückersche Klassifikation der Linien 2. Ordnung und 2. Klasse im Einzelnen behandelt und im 2. Teile dargelegt, wie die direkte, lediglich durch Transformation der gewöhnlichen schiefwinkligen Koordinaten bewirkte Klassifikation dieser Linien der Hauptsache nach auf die Plückersche zurückkommt. Diese auf einfachen Determinantensätzen beruhende Methode ist zugleich eine Ausdehnung der von Staude, Analyt. Geometrie etc. für rechtwinklige Koordinaten gebrauchten Methode auf schiefwinklige.

I. Teil.

Die Gleichung der Linien 2ter Ordnung.

L. Euler (Introductio in analysin infinitorum, Lausannae 1748. 1. II, art. 86) schreibt die Gleichung der Linie zweiter Ordnung in folgender Form:

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon x y + \zeta y^2 .$$

Im Anschluß daran bedient sich auch J. Plücker (Analytisch-geometrische Entwicklungen, 1 (1828), S. 128) der Gleichung:

$$y^2 + 2\alpha y x + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0 .$$

Diese Schreibweise wurde bald darauf von Cauchy (Exercices de mathématiques 4 (1828), S. 141) verbessert, der die Indices bei den Koefficienten einführte und der Gleichung folgende Gestalt gab:

$$A_{xx} x^2 + A_{xy} x y + A_{yy} y^2 + A_{xz} x + A_{yz} y + A_{zz} = 0 .$$

Die heutige Form der Gleichung der Linie zweiter Ordnung endlich verdanken wir Jacobi ((1834) Werke 3, S. 204) und Hesse (J. f. Math. 20 (1840), S. 285 = Werke, S. 23), die an die Stelle von x, y, z als Indices 1, 2, 3 setzen:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0 .$$

Die Betrachtungen und Entwickelungen Plückers über die Kurven zweiter Ordnung wollen wir in der jetzt üblichen Schreibweise wiedergeben.

Die Einteilung der Kurven 2ter Ordnung bei Plücker.

Einführung der Determinante.

Die Klassifikation der Linien zweiter Ordnung bei Plücker, die wir im ersten Paragraphen seiner Entwickelungen über die Linien zweiter Ordnung finden, umfaßt bereits fast alle Fälle, doch ist sie, da die Determinante noch nicht zur Anwendung kommt, noch einer Vervollkommnung bedürftig. Wir führen daher die Determinante ein, und wenn die Gleichung der Kurve, die auf ein beliebiges Koordinatensystem bezogen sei, die Form hat:

$$g(x\,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

so bezeichnen wir als die Determinante der Koefficienten:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Die Unterdeterminanten seien:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \ldots .$$

Übergang zu einem parallelen Koordinatensystem.

Um die linearen Glieder von x und y aus der Gleichung der Kurve zu entfernen, nimmt Plücker eine Parallelverschiebung der Koordinaten vor. Die ursprüngliche Gleichung der Kurve geht, wenn wir für x, y : $x_0 + x$, $y_0 + y$ *) setzen, in die der

*) Statt $x'\,y'$ bei Plücker setzen wir $x_0\,y_0$.

Plückerschen Gleichung (2) entsprechende Gleichung über:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 g_1^0 x + 2 g_2^0 y + g^0 = 0,$$

worin g_1 und g_2 die halben partiellen Differentialquotienten von g bedeuten.

Mittelpunkt.

Die Glieder mit x und y verschwinden, wenn:

$$g_1^0 = a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} = 0,$$

$$g_2^0 = a_{21} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} = 0 \text{ (bei Plücker Gl. (3)).}$$

Für x_0 und y_0 ergeben sich hieraus folgende Werte:

$$x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

Setzen wir diese Werte von x_0 und y_0 in g_0 ein, so erhalten wir für das konstante Glied, das wir mit a'_{33} bezeichnen wollen:

$$a'_{33} = \frac{A}{A_{33}}.$$

Die Gleichung der Kurve reduziert sich für $g_1^0 = 0$, $g_2^0 = 0$ auf die Form:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + a'_{33} = 0.$$

Wird durch den Koordinatenanfangspunkt eine Gerade gezogen, $y = \alpha x$*), so erhält man für die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve gleiche und entgegengesetzte Werte. Der Koordinatenanfangspunkt fällt also mit dem Mittelpunkt der Kurve

*) α ist für $\varkappa$ gesetzt.

zusammen. x_0, y_0 sind demnach die Koordinaten des Mittelpunktes, und die Gleichung der Kurve in der reduzierten Form ist die Mittelpunktsgleichung.

Die Mittelpunktskurven.

Der Mittelpunkt der Kurve liegt im Endlichen, wenn

$$A_{33} \neq 0 .$$

1. Eigentliche Kurven.

Die einzelnen Fälle, welche die Bedingung $A_{33} \neq 0$ umfaßt, leitet Plücker her aus der Realität der Schnittpunkte der Geraden durch den Mittelpunkt, $y = \alpha x$, mit der Kurve. Die x-Koordinaten dieser Schnittpunkte haben die Werte (Nummer 231):

$$x = \pm \sqrt{\frac{-a'_{33}}{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}\alpha^2}} .$$

Der Nenner unter der Wurzel läßt sich in zwei Faktoren zerlegen (Nummer 232):

$$a_{11} + 2a_{12}\alpha + a_{22}\alpha^2 = a_{22}\left(\alpha + \frac{a_{12}}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}\sqrt{-A_{33}}\right)$$

$$\cdot\left(\alpha + \frac{a_{12}}{a_{22}} + \frac{1}{a_{22}}\sqrt{-A_{33}}\right).$$

Sehen wir von a_{22} ab, das wir mit A in $a'_{33} = \frac{A}{A_{33}}$ zusammenfassen wollen, so folgt, daß der Nenner immer positiv ist, wenn $A_{33} > 0$. Ist nun auch $\frac{A}{a_{22}}$ oder, da es nur auf das Vorzeichen ankommt, $a_{22} \cdot A$ ebenfalls größer als 0, so sind die Schnittpunkte imaginär; die Kurve ist die imaginäre Ellipse.

Ist $a_{22} A < 0$, so sind die Schnittpunkte stets reell und endlich. Die Kurve ist die reelle Ellipse.

Für den Fall $A_{33} < 0$ (Nummer 233) gibt es zwei Werte von α:

$$-\frac{a_{12}}{a_{22}} + \frac{1}{a_{22}}\sqrt{-A_{33}}\ ,\quad -\frac{a_{12}}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}\sqrt{-A_{33}}\ ,$$

für die der Nenner gleich 0 wird, die Schnittpunkte also ins Unendliche fallen. Liegt der Wert von α zwischen diesen beiden Ausdrücken, so ist der Nenner negativ, liegt er außerhalb, positiv. Im ersteren Falle sind die Schnittpunkte reell, wenn $a_{22} . A < 0$, im zweiten Falle, wenn $a_{22} A > 0$ ist.

Die beiden Geraden $y = \left(-\frac{a_{12}}{a_{22}} \pm \frac{1}{a_{22}}\sqrt{-A_{33}}\right)x$, die die Kurve erst im Unendlichen treffen, heißen Asymptoten. Sie bilden den Übergang von den Linien, welche der Kurve begegnen, zu denen, welche sie nicht mehr treffen. Die Kurve ist die Hyperbel. Von dem Vorzeichen von $a_{22} . A$ hängt es ab, in welchem der beiden Winkelpaare der Asymptoten die Hyperbel liegt (bei Plücker von ε').

2. Linienpaare.

Die auf den Mittelpunkt reduzierte Gleichung der Kurve stellt ein Linienpaar dar für $a'_{33} = 0$ oder $A = 0$ (Nummer 234).

Nun ist (Gl. (1) und (2)):

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 =$$

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{12} - \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}} y\right)\left(x + \frac{a_{12} + \sqrt{-A_{33}}}{a_{11}} y\right) = 0 .$$

Das Linienpaar ist danach imaginär oder reell, je nachdem $A_{33} > 0$ oder $A_{33} < 0$ ist.

Plücker sagt, daß die Gleichung der Kurve für $A_{33} > 0$ unr einen Punkt darstellt, das ist der reelle Schnittpunkt der beiden imaginären Linien. Weiter sagt er, daß für $A_{33} = 0$ die Linien des Paares zusammenfallen. Diese Angabe ist nicht richtig, denn für $A_{33} = 0$ würde der Koordinatenanfangspunkt ins Unendliche fallen. Es ist daher nicht nötig, daß die Linien zusammenfallen, sie brauchen nur parallel zu sein.

Die Kurven mit unendlich fernem Mittelpunkt.

Die gemeinsame Bedingung für die Kurven mit unendlich fernem Mittelpunkt lautet:

$$A_{33} = 0 \quad \text{(Nummer 235).}$$

1. Eigentliche Kurven.

Die Gleichung der Kurve läßt sich für $A_{33} = 0$ nicht mehr auf den Mittelpunkt transformieren, d. h. g_1^0 und g_2^0 können beide nicht gleichzeitig gleich 0 sein, doch kann man das konstante Glied g^0 zugleich mit einem der beiden Ausdrücke, g_1^0, verschwinden lassen, und danach eine der Gleichung (4) entsprechende Form der Gleichung der Kurve erhalten:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a'_{23} y = 0.$$

Die Faktorenzerlegung der ersten drei Glieder gestaltet sich hier einfacher, da $A_{33} = 0$, und die Gleichung der Kurve läßt sich in folgende umformen:

$$a_{11} \left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}} y \right)^2 + 2 a'_{23} y = 0 \quad \text{(Gl. (6)).}$$

Plücker diskutiert diese Gleichung. Die durch sie dargestellte Kurve ist die Parabel.

Mit Rücksicht auf $A_{33} = 0$ findet man für a'_{23} folgenden Wert:

$$a'_{23} = \frac{A_{23}}{a_{11}}.$$

2. Linienpaare.

In Nummer 236 wird schließlich der Fall behandelt, in dem die beiden Gleichungen $g_1^0 = 0$ und $g_2^0 = 0$ miteinander identisch werden. Dieser Fall tritt ein, wenn:

$$A_{31} = 0, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = 0.$$

Alsdann kann man die Gleichung der Kurve in der Form schreiben:

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2 + a'_{33} = 0.$$

Diese Gleichung stellt ein paralleles Linienpaar dar. Das konstante Glied bestimmt man auf folgende Weise. Da $g_1^0 = g_2^0 = 0$, so ist:

$$a'_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}.$$

Drückt man nun in der Gleichung $g_1^0 = 0$ oder $g_2^0 = 0$ die eine Unbekannte durch die andere aus und setzt in den Wert von a'_{33} ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$, $A_{33} = 0$:

$$a'_{33} = \frac{A_{22}}{a_{11}},$$

und die Gleichung des parallelen Linienpaares lautet dann:

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{21}}{a_{11}}y\right)^2 + \frac{A_{22}}{a_{11}} = 0.$$

Es folgt hieraus, daß das parallele Linienpaar imaginär oder reell ist, je nachdem:

$$A_{22} > 0 \text{ oder } A_{22} < 0 .$$

Für $A_{22} = 0$ erhält man ein zusammenfallendes Linienpaar.

Wir stellen die Plückerschen Kriterien in unserer Bezeichnungsweise in folgender Tabelle zusammen.

	$A \neq 0$ Eigentl. Kegelschnitte		$A = 0$ Linien-	$A_{31}=0\ A_{32}=0\ A_{33}=0$ Parallellinienpaar		$A_{31}=0\ A_{32}=0$ $A_{33}=0$ $A_{22}=0$
	$a_{22} A > 0$	$a_{22} A < 0$	paare	$A_{22} > 0$	$A_{22} < 0$	Doppellinie
$A_{33} > 0$	Imaginär. Ellipse	Reelle Ellipse	Imaginäres Linienpaar			
$A_{33} < 0$	Hyperbel	Hyperbel	Reelles Linienpaar			
$A_{33} = 0$		Parabel		Imaginär. Parallel-Linienpaar	Reelles Parallel-Linienpaar	Doppellinie

Kanonische Gleichungen. Invariantentheorie.

Übergang zu einem konzentrischen schiefwinkligen Koordinatensystem.

Die allgemeine Gleichung der Kurve:

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$$

soll auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem transformiert werden (§ 2, Nummer 237).

Die Transformationsformeln lauten:

$$\sin xy \,.\, x = \sin x'y \,.\, x' + \sin y'y \,.\, y' ,\ *)$$
$$\sin xy \,.\, y = \sin x'x \,.\, x' + \sin y'x \,.\, y' .$$

*) Die Winkel der neuen Achsen gegen die Achsen des alten Systems sind bei Plücker mit φ, φ', ψ, ψ' bezeichnet. ϑ bedeutet dort auch den Winkel xy.

Daraus folgt:

$$x = -\frac{\sin x'y \,.\, x' + \sin y'y \,.\, y'}{\sin xy} = \frac{\sin x'y \,.\, x' + \sin y'y \,.\, y'}{\sin \vartheta},$$

$$y = \frac{\sin x'x \,.\, x' + \sin y'x \,.\, y'}{\sin yx} = -\frac{\sin x'x \,.\, x' + \sin y'x \,.\, y'}{\sin \vartheta},$$

wenn $\vartheta = \sphericalangle xy$ gesetzt ist.

Durch Einsetzen der Werte von x und y gelangen wir zu einer der Plückerschen Gleichung (2) entsprechenden Gleichung:

$$\frac{a_{11} \sin^2 x'y - 2a_{12} \sin x'x \,.\, \sin x'y + a_{22} \,.\, \sin^2 x'x}{\sin^2 \vartheta} \,.\, x'^2$$

$$+ 2\frac{a_{11} \sin x'y \,.\, \sin y'y - a_{12} (\sin x'y \,.\, \sin y'x +}{\sin^2 \vartheta}$$

$$\frac{\sin x'x \sin y'y) + \sin x'x \,.\, \sin y'y}{\sin^2 \vartheta} \,.\, x'y'$$

$$+ \frac{a_{11} \sin^2 y'y - 2a_{12} \sin y'x \,.\, \sin y'y + a_{22} \sin^2 y'x}{\sin^2 \vartheta} \,.\, y'^2$$

$$+ 2\frac{a_{13} \sin x'y - a_{23} \sin x'x}{\sin \vartheta} \,.\, x'$$

$$+ 2\frac{a_{13} \sin y'y - a_{23} \sin y'x}{\sin \vartheta} + a_{33} = 0.$$

Analog wie bei Plücker (Gleichung (3)) seien

$$x = \alpha y \text{ und } x = \alpha' y \text{ *)}$$

die Gleichungen der neuen Koordinatenachsen in bezug auf das alte System.

Dann ist:

$$\alpha = -\frac{\sin x'y}{\sin x'x}, \; \alpha' = -\frac{\sin y'y}{\sin y'x}.$$

---

*) α und α' sind für a und a' gesetzt.

Indem man α und α' einführt, kann man die Gleichung der Kurve in folgender Weise schreiben (Gleichung (4)):

$$\frac{\sin^2 x'x}{\sin^2 \vartheta}\left(a_{11}\,\alpha^2 + 2a_{12}\,\alpha + a_{13}\right)x'^2$$

$$+ 2\,\frac{\sin x'x \,.\, \sin y'x}{\sin^2 \vartheta}\left(a_{11}\,\alpha\,\alpha' + a_{12}\,(\alpha + \alpha') + a_{13}\right)x'y'$$

$$+ \frac{\sin^2 y'x}{\sin^2 \vartheta}\left(a_{11}\,\alpha'^2 + 2a_{12}\,\alpha' + a_{13}\right)y'^2$$

$$- 2\,\frac{\sin x'x}{\sin \vartheta}\left(a_{13}\,\alpha + a_{23}\right)x'$$

$$- 2\,\frac{\sin y'x}{\sin \vartheta}\left(a_{13}\,\alpha' + a_{23}\right)y' + a_{33} = 0\,.$$

Asymptotengleichung der Hyperbel.

Die Glieder mit x'^2 und y'^2 können beide gleichzeitig verschwinden, wenn α und α' beide der quadratischen Gleichung (Gl. (5)):

$$a_{11}\,z^2 + 2a_{12}\,z + a_{22} = 0$$

genügen.

Für die Hyperbel ($A_{33} < 0$) liefert diese Gleichung reelle Werte von α und α'; für die Ellipse ($A_{33} > 0$) dagegen sind die Werte von α und α' imaginär, und für die Parabel ($A_{33} = 0$) würde $\alpha = \alpha'$ sein, und somit würden die beiden neuen Koordinatenachsen in eine einzige zusammenfallen.

In der Gleichung der Hyperbel können also die Glieder mit x'^2 und y'^2 verschwinden. Schafft man durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems auch

noch die Glieder mit x' und y' fort, so erhält man die Gleichung der Hyperbel in bezug auf ihre Asymptoten (Gleichung (7)):

$$x' \cdot y' + c = 0,$$

worin $c = \frac{a'_{33}}{2a'_{12}}$ ist.

Asymptotenwinkel.

Sind:

$$x = \alpha y \text{ und } x = \alpha' y$$

die Gleichungen der Asymptoten, so berechnet sich der Asymptotenwinkel ω*) aus der Formel (s. Theorie der graden Linie, Nummer 17):

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{(\alpha' - \alpha)\sin\vartheta}{1 + (\alpha + \alpha')\cos\vartheta + \alpha\alpha'},$$

worin ϑ den Winkel der Koordinaten bedeutet.

Da nun α und α' der quadratischen Gleichung:

$$a_{11} z^2 + 2a_{12} z + a_{22} = 0$$

genügen, so ist:

$$\alpha + \alpha' = -\frac{2a_{12}}{a_{11}}, \quad \alpha\alpha' = \frac{a_{22}}{a_{11}}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte ergibt sich für $\operatorname{tg}\omega$ schließlich:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\pm\sqrt{-A_{33}} \cdot \sin\vartheta}{a_{11} - 2a_{12}\cos\vartheta + a_{22}}.$$

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist $\operatorname{tg}\omega = \frac{\pm\sqrt{-A_{33}}}{a_{11} + a_{22}}$.

---

*) Bei Plücker statt $\omega : \eta$.

Im Falle der gleichseitigen Hyperbel ($\omega = \frac{\pi}{2}$) ist für $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$:

$$a_{11} - 2a_{12}\cos\vartheta + a_{22} = 0;\ \text{für}\ \vartheta = \frac{\pi}{2}: a_{11} = -a_{22}.$$

Hyperbelschar mit denselben Asymptoten.

Ist $x_0\, y_0$ *) der Mittelpunkt einer Hyperbel, so lautet die Gleichung der Asymptoten (Gl. (12)):

$$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes $x_0\, y_0$ lassen sich aus den beiden Gleichungen $g_1^0 = 0$, $g_2^0 = 0$ berechnen, und für das konstante Glied in dieser Gleichung findet man alsdann, daß es unabhängig ist von a_{33}. Alle Hyperbeln also mit den konstanten Koefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23} haben dieselben Asymptoten.

Transformieren wir die Gleichung der Hyperbel auf den Mittelpunkt und definieren wir die Asymptoten als die Verbindungslinien des Mittelpunktes mit dem unendlich fernen Punktepaar, so leuchtet jenes Resultat Plückers, bei homogener Schreibweise und $t = 0$ gesetzt, unmittelbar ein.

Die Gleichungen der Kurven zweiter Ordnung in bezug auf konjugierte Durchmesser.

In den Nummern 242 und 243 behandelt Plücker die Transformation der Gleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel auf zugeordnete Durchmesser als Koordinatenachsen.

---

*) Bei Plücker statt $x_0\, y_0 : x'\, y'$.

Die Bedingung dafür, daß die Koordinatenachsen die Richtung eines Paares konjugierter Durchmesser haben, lautet (Gl. (15)):

$$a'_{12} = 0$$

oder:

$$a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha + \alpha') + a_{22} = 0.$$

Diese Gleichung kann auf unendlich viele Weisen erfüllt werden. α' durch α ausgedrückt hat folgenden Wert:

$$\alpha' = -\frac{a_{12}\alpha + a_{22}}{a_{11}\alpha + a_{12}} \quad \text{(Gl. (16))}.$$

Wird die Gleichung der Kurve durch $a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha + a_{22}$ dividiert, so ist:

$$a'_{22} = \frac{\sin^2 y' x}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{a_{11}\alpha'^2 + 2a_{12}\alpha' + a_{22}}{a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha + a_{22}}.$$

Dieser Ausdruck für a'_{22} geht durch Einsetzen des Wertes von α' über in (Gl. (18)):

$$a'_{22} = \frac{\sin^2 y' x}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{A_{33}}{(a_{11}\alpha + a_{12})^2}.$$

In der Gleichung der Ellipse ($A_{33} > 0$) haben hiernach a'_{11} und a'_{22} gleiches, in der Gleichung der Hyperbel ($A_{33} < 0$) entgegengesetztes Vorzeichen. In der Gleichung der Parabel ($A_{33} = 0$) wird mit a'_{12} zugleich auch $a'_{22} = 0$.

Transformiert man die Gleichung der Ellipse und Hyperbel auf den Mittelpunkt und führt die halben konjugierten Durchmesser λ und μ*) ein, so lauten die Gleichungen der Ellipse und Hyperbel in bezug auf das Koordinatensystem ξ, η (Nummer 243):

$$\frac{\xi^2}{\lambda^2} \pm \frac{\eta^2}{\mu^2} = 1.$$

*) λ, μ ist für A, B gesetzt.

In der Gleichung der Parabel kann neben den Gliedern mit x y und y^2 auch noch das Glied mit x und das konstante Glied fortgeschafft werden, und man erhält so die Gleichung der Parabel in bezug auf einen Durchmesser und die Tangente in dessen Scheitelpunkt:

$$\xi^2 = 2\lambda\eta,$$

worin λ*) den Parameter bedeutet.

Konjugierte Richtungen.

Wenn die Richtung eines Durchmessers gegeben ist, so kann man, da $a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha + \alpha') + a_{22} = 0$ ist, leicht die Richtung des konjugierten Durchmessers bestimmen (N. 244).

Ist α gegeben, so folgt für α':

$$\alpha' = -\frac{a_{12}\alpha + a_{22}}{a_{11}\alpha + a_{12}}.$$

Für die Parabel ist $\alpha' = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$, da $A_{33} = 0$, d. h. alle Durchmesser der Parabel sind einander parallel.

Hauptachsen.

Zwei aufeinander senkrechte konjugierte Durchmesser heißen die Achsen der Kurven. Die Bedingungsgleichungen für diese lauten (N. 245 (3) (4)):

$$a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha + \alpha') + a_{22} = 0,$$
$$1 + (\alpha + \alpha')\cos\vartheta + \alpha\alpha' = 0.$$

*) λ ist für p gesetzt.

Diese beiden Gleichungen sind in bezug auf α und α' symmetrisch. Durch Elimination von α' ergibt sich (Gl. (5)):

$$\alpha^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11}\cos\vartheta - a_{12}}\,\alpha + \frac{a_{12} - a_{22}\cos\vartheta}{a_{11}\cos\vartheta - a_{12}} = 0.$$

Für $a_{11} = a_{22}$ wird $\alpha^2 = 1$, $\alpha = 1$, $\alpha' = -1$, d. h. wenn in der Gleichung der Kurve $a_{11} = a_{22}$ ist, so schneiden die Koordinatenachsen jede der beiden Achsen der Kurve unter gleichen Winkeln. Plücker gibt auch die Umkehrung dieses Satzes an. Weiter zeigt er, daß beim Kreise irgend zwei beliebige senkrechte Durchmesser seine Achsen sein können, da für diesen der Koefficient von α den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ annimmt, und die beiden Gleichungen zur Bestimmung von α und α' miteinander identisch werden.

Zwei Systeme konjugierter Durchmesser für einen gegebenen Winkel.

In Nummer 246 zeigt Plücker, daß zwei Paare konjugierter Durchmesser einen gegebenen Winkel miteinander bilden können. ϑ sei der Winkel zweier konjugierter Durchmesser, φ und φ' die Winkel dieser gegen die x-Achse. Dann ist $\vartheta = \varphi' - \varphi$. Zur Vereinfachung der Rechnung führt Plücker hier ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein. Da $\varphi' = \vartheta + \varphi$, so ist (Gl. (10)):

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\vartheta \,.\, \operatorname{tg}\varphi}\ ^{*}).$$

---

*) Es ist gesetzt $\varphi, \varphi', \vartheta$ statt ω, ω', ξ.

Die Bedingungsgleichung für zwei konjugierte Durchmesser im rechtwinkligen Koordinatensystem lautet (Gl. (11)):

$$a_{11} \operatorname{tg}\varphi \,.\, \operatorname{tg}\varphi' + a_{12}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\varphi') + a_{22} = 0.$$

Die beiden Gleichungen sind in $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi'$ symmetrisch. Durch Elimination von $\operatorname{tg}\varphi'$ folgt (Gl. (12)):

$$(a_{11} - a_{12}\operatorname{tg}\vartheta)\operatorname{tg}^2\varphi + [2a_{12} + (a_{11} - a_{22})\operatorname{tg}\vartheta] \cdot \operatorname{tg}\varphi + a_{22} + a_{12}\operatorname{tg}\vartheta = 0.$$

Hieraus folgt für $\operatorname{tg}\varphi$ (Gl. (13)):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2a_{12} + (a_{11} - a_{22})\operatorname{tg}\vartheta \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 \operatorname{tg}^2\vartheta - A_{33}(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta}}{2(a_{11} - a_{12}\operatorname{tg}\vartheta)}$$

Für die Hyperbel ($A_{33} < 0$) ist die Wurzel immer reell, gibt es also immer zwei reelle Werte von $\operatorname{tg}\varphi$; für die Ellipse wird die Wurzel gleich 0, wenn:

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{4A_{33}}{(a_{11} + a_{22})^2 - 4A_{33}}$$

oder (Gl. (14)):

$$\sin^2\vartheta = \frac{4A_{33}}{(a_{11} + a_{22})^2}.$$

Dieser Wert ist zugleich das Minimum von $\sin^2\vartheta$ für reelle Werte von $\operatorname{tg}\varphi$.

Invariantentheorie.

Die Invariantentheorie und die auf ihr beruhenden Sätze finden wir in den Nummern 247—249.

Die Gleichung der Kurve (Gl. (1)):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

sei wie bei P l ü c k e r auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen. Sie soll auf ein konzentrisches schief-

winkliges Koordinatensystem transformiert werden. Die Transformationsformeln lauten:

$$x = x' \sin \varphi + y' \cdot \sin \varphi', \text{ *)}$$
$$y = x' \cos \varphi + y' \cdot \cos \varphi'.$$

Durch Einsetzen der Werte von x und y in obige Gleichung geht jene über in (Gl. (2)):

$$a'_{11} x'^2 + 2 a'_{12} x' y' + a'_{22} y'^2 + 2 a'_{13} x' + 2 a'_{23} y' + a_{33} = 0,$$

worin man die Koefficienten leicht berechnen kann.

Wenn ϑ den Winkel der neuen Koordinaten bedeutet, so folgt aus obigen Transformationsformeln für x' und y':

$$\sin \vartheta \cdot x' = x \cdot \cos \varphi' - y \cdot \sin \varphi',$$
$$\sin \vartheta \cdot y' = -x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi.$$

In den Gleichungen (3) bis (5) sind die Koefficienten der drei ersten Glieder in der neuen Gleichung durch die entsprechenden Glieder der alten Gleichung, also a'_{kl} durch a_{kl}, in den Gleichungen (6) bis (8) a_{kl} durch a'_{kl} ausgedrückt. Durch geeignete Verbindung dieser Gleichungen findet dann Plücker, daß die Ausdrücke (9) und (10), die in unserer Schreibweise lauten:

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \frac{a_{11} + a_{22} - 2 a_{12} \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta},$$

invariant sind.

Mit Hülfe der Determinantentheorie gelangt man schneller zu der Einsicht, daß obige Ausdrücke invariant

---

*) Statt φ und φ' bei Plücker: ω und ω'.

sind (vergl. Staude, Analyt. Geom. des Punktepaares etc. § 22, 2 und 3).

Bezieht man die Gleichung einer Ellipse bez. Hyperbel auf zwei beliebige Paare von konjugierten Durchmessern, so ist:

$$a_{11} = \frac{1}{\lambda^2}, \; a_{22} = \pm \frac{1}{\mu^2}, \; a_{12} = 0;$$

$$a'_{11} = \frac{1}{\lambda'^2}, \; a'_{22} = \pm \frac{1}{\mu'^2}, \; a'_{12} = 0.$$

Die erste der beiden Invarianten führt uns dann auf folgende Gleichung:

$$\lambda^2 \mu^2 \sin^2 \vartheta = \lambda'^2 \mu'^2 \sin^2 \vartheta',$$

oder (Gl. (12)):

$$\lambda \mu \, . \sin \vartheta = \lambda' \mu' \, . \sin \vartheta'.$$

Bei der Ellipse und Hyperbel haben demnach alle Parallelogramme aus zwei konjugierten Durchmessern gleichen Flächeninhalt.

Die zweite der beiden Invarianten ergibt folgende Gleichung:

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\frac{1}{\lambda^2} \pm \frac{1}{\mu^2} \right) = \frac{1}{\sin^2 \vartheta'} \left(\frac{1}{\lambda'^2} \pm \frac{1}{\mu'^2} \right),$$

die sich mit Rücksicht auf die Gleichung $\lambda^2 \mu^2 \sin^2 \vartheta = \lambda'^2 \mu'^2 \sin^2 \vartheta'$ vereinfachen läßt zu:

$$\lambda^2 \pm \mu^2 = \lambda'^2 \pm \mu'^2.$$

Bei der Ellipse ist demnach die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Quadrate je zweier konjugierter Durchmesser eine konstante Größe (Nummer 250).

Sekantensätze.

In dem dritten Paragraphen stellt Plücker die geometrische Bedeutung der Koefficienten in der allgemeinen Gleichung der Kurve fest. Da die moderne Bezeichnungsweise — der Faktor von x^2 oder y^2 ist nicht gleich 1 — von der Plückerschen abweicht, so sind diese Untersuchungen von geringerem Interesse, und wir wollen sie deshalb nicht eingehend verfolgen, sondern nur einige wichtige Sekantensätze anführen, zu denen Plücker durch die erwähnten Betrachtungen gelangt.

In Nummer 253 finden wir folgende Ableitung. Läßt man eine Linie $x = x_1$*) die Kurve schneiden, so gilt, wenn wir $x = x_1$ in die allgemeine Gleichung der Kurve einsetzen, für die Koordinaten der beiden Schnittpunkte (Gl. (1)).

$$y_1 + y_2 = -\frac{2}{a_{22}}(a_{12}x_1 + a_{13}).$$

Für die Koordinaten der Schnittpunkte mit einer zweiten Geraden $x = x_2$ ist analog:

$$y'_1 + y'_2 = -\frac{2}{a_{22}}(a_{12}x_2 + a_{13}).$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt sich:

$$y_1 - y'_1 + y_2 - y'_2 = -\frac{2a_{12}}{a_{22}}(x_1 - x_2)$$

oder (Gl. (2)):

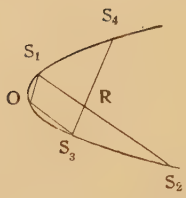
$$\frac{y_1 - y'_1 + y_2 - y'_2}{x_1 - x_2} = -\frac{2a_{12}}{a_{22}}.$$

*) Es ist x_1 für x' gesetzt, x_2 für x'', y_1 für y', y_2 für y_1 y'_1 für y'', y'_2 für $y_{''}$.

Die linke Seite dieser Gleichung hat stets einen konstanten Wert, wie man auch die Linien $x = x_1$ und $x = x_2$ annimmt. Diese Eigenschaft wird, wie Plücker angibt, von Euler (Introductio ad analysin infinitorum (1748)) als eine der beiden allgemeinsten Eigenschaften der Linien zweiter Ordnung bezeichnet.

Für $y'_1 = y_2$ (Nummer 254) ist:

$$\frac{y_1 - y'_2}{x_1 - x_2} = -\frac{2\,a_{12}}{a_{22}}.$$



Haben demnach die Transversalen die in der Figur angedeutete Lage, so ist $\frac{RS_4}{RS_1}$ konstant.

In Nummer 255 finden wir den Satz, daß die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen auf einer Geraden liegen, der aus der Gleichung folgt:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{a_{12}\,x + a_{13}}{a_{22}}.$$

Wenn x oder y in der allgemeinen Gleichung der Kurve gleich 0 gesetzt wird (Nummer 256), so ergeben die beiden Gleichungen:

$$a_{22}\,y^2 + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0, \qquad a_{11}\,x^2 + 2\,a_{13}\,x + a_{33} = 0$$

die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen. Aus den Gleichungen folgt:

$$x\,x' = \frac{a_{33}}{a_{11}}, \qquad y\,y' = \frac{a_{33}}{a_{22}}$$

und weiter:

$$\frac{x\,x'}{y\,y'} = \frac{a_{22}}{a_{11}}.$$

Dieser Wert $\frac{a_{22}}{a_{11}}$ ändert sich bei Parallelverschiebung der Koordinaten nicht. Wenn man daher von einem Punkte zwei gerade Linien nach einer Kurve zweiter Ordnung zieht, so ist das Verhältnis der Produkte der Abschnitte, welche durch die Kurve auf den Linien gebildet werden, konstant, wie man auch das Linienpaar parallel mit sich verschiebt. Diese Beziehung findet sich schon bei Apollonius (Conicorum libri IV, ed. J. L. Heiberg, Leipzig, Bd. 1, 1891, S. 347 ff.) und Newton ((1706) nach Cantor 3, S. 423) und ist von Euler (Introd. 2 (1748), art. 93) als die zweite allgemeine Eigenschaft der Kurven zweiter Ordnung bezeichnet worden, worauf Plücker hinweist.

Wir wollen in diesem Paragraphen nur noch die Betrachtung Plückers in Nummer 266 erwähnen.

Mit Rücksicht auf die Figur ist nach den erwähnten Transversalsätzen:

$$\frac{RS_4}{RS_1} = -\frac{a_{12}}{a_{22}},$$

$$\frac{RS_4 \cdot RS_3}{RS_2 \cdot RS_1} = \frac{a_{11}}{a_{22}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich folgende dritte herleiten:

$$\frac{a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2}{a^2_{22}} = \frac{RS_4}{RS_1} \cdot \frac{4\,RS_3 \cdot RS_1 - RS_4 \cdot RS_2}{RS_2 \cdot RS_1}.$$

Für die Parabel ist $A_{33} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 = 0$, somit auch:

$$4\,RS_3 \cdot RS_1 - RS_4 \cdot RS_2 = 0.$$

Demnach ist bei der Parabel das Parallelogramm $S_2 S_4$ gleich dem vierfachen Parallelogramm $S_1 S_3$. Bei der Ellipse und Hyperbel ist das Vorzeichen des Ausdruckes $4\,RS_3 \,.\, RS_1 - RS_4 \,.\, RS_2$ von der Lage des Punktes R abhängig.

Gleichung der Tangente.

Tangenten und Polaren.

Die Gleichung der Tangente ist bereits von Cauchy (Exercises de mathématiques (1826) S. 80) aufgestellt worden. Plücker leitet sie in § 4 in andrer Weise als Cauchy ab und macht darauf aufmerksam, daß jede direkte Tangentenmethode eine Umschreibung der Methode der Differentialrechnung ist.

Eine Gerade:

$$x - x' = \alpha\,(y - y')\ ^*)$$

schneidet die Kurve außer im Punkte $x'\,y'$ noch in einem zweiten Punkte $x' + h,\ y' + k$. $x'\,y'$ sowohl wie $x' + h,\ y' + k$ genügen der Gleichung der Kurve, und die beiden Gleichungen, die durch Einsetzen jener beiden Wertepaare entstehen, werden von einander abgezogen. Alsdann erhält man folgende Gleichung:

$$a_{11}\,h^2 + 2a_{12}\,hk + a_{22}\,k^2 + 2\,(a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13})\,h + 2\,(a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23})\,k = 0\,.$$

Da nun $\alpha = \frac{h}{k}$ ist, so kann man z. B. h durch k ausdrücken, und es entsteht dann eine Gleichung zweiten Grades in k, die jedoch, indem man die ganze Gleichung

---

*) Es ist gesetzt α statt x; $x_1'\ y'$ statt $x_1''\ y''$.

durch k dividiert, in folgende Gleichung ersten Grades übergeht. (Gl. (4)):

$$a_{11}\,\alpha^2 k + 2a_{12}\,\alpha k + a_{22}\,k + 2\,(a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13})\,\alpha + 2\,(a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23}) = 0\,.$$

Für lim $k = 0$ ist der eine Wert von α gleich ∞, der andere Wert ist:

$$\alpha = -\frac{a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23}}{a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13}}\,.$$

Dieser Wert von α wird in die Gleichung $x - x' = \alpha\,(y - y')$ eingesetzt, und es ergibt sich alsdann die Gleichung der Tangente in der bekannten Form:

$$(a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13})\,x + (a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23})\,y + a_{31}\,x' + a_{32}\,y' + a_{33} = 0\,.$$

Gleichung der Polaren.

Als Polare eines Punktes in bezug auf einen Kegelschnitt bezeichnet Plücker diejenige gerade Linie, die durch die Berührungspunkte der beiden von dem gegebenen Punkt an die Kurve gezogenen Tangenten geht. Er gelangt zu der Gleichung der Polaren, indem er in der Gleichung der Tangente x und x' vertauscht. (Gleichung (6)):

$$(a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13})\,x + (a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23})\,y + a_{31}\,x' + a_{32}\,y' + a_{33} = 0\,.$$

Die Polare eines Punktes definiert man besser als den Ort der vierten harmonischen Punkte, zumal da die Tangenten von einem Punkte innerhalb der Kurve an diese imaginär sind. Der Hinweis auf die harmonische Teilung einer Sehne durch Pol, Polare und

Kurve findet sich zuerst bei Poncelet (Traité des propriétés projectives des figures 1822, art. 194; 186).

Plücker macht darauf aufmerksam, daß die Polare eines Punktes auf dem Kegelschnitt in die Tangente in diesem übergeht. Ferner zeigt er, daß bei einem Linienpaar die Polare durch den Doppelpunkt hindurchgeht, und daß die beiden Linien des Paares, die Polare und die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Doppelpunkt ein harmonisches Strahlenbüschel bilden.

Lage der Polaren in bezug auf die Asymptotenchorde.

Die Gleichung der Polaren des Koordinatenanfangspunktes lautet (Nummer 269):

$$a_{13}\,x + a_{23}\,y + a_{33} = 0\,.$$

Nun stellt die Gleichung:

$$a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 = 0$$

ein Linienpaar dar, das zu den Asymptoten parallel liegt. Jene in Verbindung mit der Gleichung der Kurve ergibt die Gleichung einer Linie, die Plücker die Asymptotenchorde nennt:

$$2a_{13}\,x + 2a_{23}\,y + a_{33} = 0\,.$$

Die Polare jedes beliebigen Punktes ist danach parallel der Asymptotenchorde und doppelt so weit von dem Punkte entfernt als diese.

Stellt die allgemeine Gleichung der Kurve eine Parabel dar, so bedeutet $a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 = 0$ die Gleichung eines zusammenfallenden Linienpaares, das den Durchmessern parallel ist. Der Asymptotenchorde entspricht also bei der Parabel die Tangente

im Scheitelpunkt des durch den beliebigen Punkt gehenden Durchmessers.

Bedingungsgleichung der Tangente

In Nummer 271 leitet Plücker die Bedingungsgleichung für die Tangente ab. Er zeigt, daß man auf zweierlei Arten zum Ziele gelangt.

Erstens: Eine Gerade $y = a\,x + b$ ist Tangente, wenn:

$$-a = \frac{a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13}}{a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23}},\quad -b = \frac{a_{13}\,x' + a_{23}\,y' + a_{33}}{a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind x' und y' zu eliminieren und in die Gleichung:

$$a_{11}\,x'^2 + 2a_{12}\,x'\,y' + a_{22}\,y'^2 + 2a_{13}\,x' + 2a_{23}\,y' + a_{33} = 0$$

einzusetzen.

Zweitens: Eine Gerade $y = a\,x + b$ schneidet die Kurve im allgemeinen zweimal. Man erhält aus den beiden Gleichungen zwei Werte von x und y, die in einen einzigen zusammenfallen, wenn (Gl. (3)):

$$A_{33}\,b^2 + 2\,A_{32}\,a\,b + A_{22}\,a^2 + 2\,A_{13}\,b + 2\,A_{12}\,a + A_{11} = 0.$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$y = a\,x + b,$$
$$a_{11}\,x^2 + 2a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + 2a_{13}\,x + 2a_{23}\,y + a_{33} = 0$$

folgt nämlich z. B. für die x-Koordinate:

$$(a_{11} + 2a_{12}\,a + a_{22}\,a^2)\,x^2 + 2\,(a_{12}\,b + a_{22}\,a\,b + a_{13} + a_{23}\,a)\,x + a_{22}\,b^2 + 2a_{23}\,b + a_{33} = 0.$$

Die beiden Werte von x fallen zusammen, wenn:

$$(a_{12}\,b + a_{22}\,.\,a\,b + a_{13} + a_{23}\,a)^2 - (a_{22}\,b^2 + 2a_{23}\,b + a_{33})\,(a_{11} + 2a_{12}\,a + a_{22}\,a^2) = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich in obige Bedingungsgleichung umformen. Plücker ändert sie in Nummer 272 dadurch noch etwas um, daß er als Gleichung der Geraden $p\,y + q\,x = p\,.\,q$ einführt.

Gleichung des Tangentenpaares.

Wir wollen hier noch die Gleichung des Tangentenpaares anführen. (Nummer 277).

Das Tangentenpaar durch einen Punkt $x_0\,y_0$ habe folgende Gleichung (Gl. (5)):

$$[y - y_0 - a_1 (x - x_0)]\,.\,[y - y_0 - a_2 (x - x_0)] = 0\,.^*)$$

Hierin sind a_1 und a_2 zu berechnen.

Soll eine Gerade:

$$y - y_0 = a\,(x - x_0)$$

Tangente der Kurve sein, so muß sie der Bedingungsgleichung der Tangente genügen — für b ist $y_0 - a\,x_0$ zu setzen — d. h. es muß sein (Gl. (6)):

$$\begin{gathered}(A_{33}\,x_0^2 - 2\,A_{32}\,x_0 + A_{22})\,a^2 \\ + 2\,(-A_{33}\,x_0\,y_0 + A_{32}\,y_0 - A_{31}\,x_0 + A_{12})\,a \\ + A_{33}\,y_0^2 + A_{31}\,y_0 + A_{11} = 0\,.\end{gathered}$$

Für die Wurzeln dieser Gleichung folgt alsdann:

$$a_1 + a_2 = -\frac{-A_{33}\,x_0\,y_0 + A_{32}\,y_0 - A_{31}\,x_0 + A_{12}}{A_{33}\,x_0^2 - 2\,A_{32}\,x_0 + A_{22}},$$

$$a_1\,.\,a_2 = \frac{A_{33}\,y_0^2 + 2\,A_{31}\,y_0 + A_{11}}{A_{33}\,x_0^2 - A_{32}\,x_0 + A_{22}}.$$

Diese Werte werden in die entwickelte Gleichung des Tangentenpaares:

$$(y - y_0)^2 - (a_1 + a_2)\,(x - x_0)\,(y - y_0) + a_1\,a_2\,(x - x_0)^2 = 0$$

eingesetzt und man erhält:

---

*) Für x', y', a', a'' ist gesetzt x_0, y_0, a_1, a_2.

$$(A_{33}\,x_0^2 - 2\,A_{32}\,x_0 + A_{22})\,(y - y_0)^2 +$$
$$(-A_{33}\,x_0\,y_0 + A_{32}\,y_0 - A_{31}\,x_0 + A_{12})\,(x - x_0)\,(y - y_0)$$
$$+ (A_{33}\,y_0^2 + 2\,A_{31}\,y_0 + A_{11})\,(x - x_0)^2 = 0\,.$$

Diese Gleichung ändert Plücker noch in der Form um (Gl. (7)), um sie für spätere Entwickelungen brauchbar zu machen. Da diese jedoch für uns nicht mehr in Betracht kommen, wollen wir von der Umformung absehen.

Die Gleichung der Kurve zweiter Klasse.

Die allgemeine Gleichung der Kurve zweiten Grades in Linienkoordinaten findet sich zuerst bei Plücker, J. f. Math. 6 (1830) S. 109 und im zweiten Bande seiner analyt.-geometr. Entwickelungen (1831) S. 47 in folgender Form:

$$A\,w^2 + 2\,B\,vw + C\,w^2 + 2\,D\,uw + 2\,E\,uv + F\,u^2 = 0.$$

Gergonne benutzt in seinen Annalen 11 (1820/21) S. 381 noch nicht die richtigen Linienkoordinaten, ebenso Plücker noch nicht im ersten Bande seiner Entwickelungen (1828) S. 160. Beide gebrauchen noch in diesen Werken die positiven Abschnitte auf den Koordinatenachsen als Linienkoordinaten.

Hesse (Siebente Vorlesung, S. 16) führte die Koefficienten b_{11}, b_{12}, b_{22} ... ein; er ist somit der Urheber der modernen Schreibweise der Kurven zweiter Klasse:

$$b_{11}\,u^2 + 2\,b_{12}\,uv + b_{22}\,v^2 + 2\,b_{13}\,uv + 2\,b_{23}\,vs + b_{33}\,s^2 = 0,$$

deren wir uns bei der Klassifikation der Kurven zweiter Klasse bedienen wollen.

Die I. Einteilung der Kurven zweiter Klasse bei Plücker.

Plücker behandelt die Einteilung der Kurven zweiter Klasse im ersten und dritten Paragraphen seiner „Theorie der Örter zweiter Klasse“. Wir wollen zunächst das Verfahren im ersten Paragraphen kennen lernen.

Wir führen auch hier wieder die Determinante der Koefficienten ein und bezeichnen sie mit B. Die Unterdeterminanten seien B_{11}, B_{12}, B_{13} . . . .

In Nummer 455 ändert Plücker zunächst die Gleichung der Kurve insofern etwas um, als er $u = 1$ setzt (Gl. (1)). Diese Annahme, infolge derer die eine Koordinate aus der Gleichung vollkommen ausscheidet, wollen wir nicht machen.

Kordinaten-transformation.

Plücker transformiert die Gleichung der Kurve auf den Mittelpunkt, indem er eine Parallelverschiebung der Koordinaten vornimmt. Dadurch ändert sich nur die Koordinate s. Es ist:

$$s = s' - x_0 u - y_0 v.^*)$$

Die Gleichung der Kurve geht durch Einsetzen des Wertes von s in folgende über (Gl. (2)):

$$(b_{11} - 2 b_{13} x + b_{33} x_0^2) u^2$$
$$+ 2 (b_{12} - b_{13} y_0 - b_{23} x_0 + b_{33} x_0 y_0) uv$$
$$+ (b_{22} - 2 b_{23} y_0 + b_{33} y_0^2) v^2 + 2 (b_{13} - b_{33} x_0) us'$$
$$+ 2 (b_{23} - b_{33} y_0) vs' + b_{33} s'^2 = 0 .$$

---

*) s, s'; x_0 y_0 statt w, w'; x' y'.

Die Bedingungen für das Verschwinden der Glieder mit us' und vs' lauten (Gl. (3)):

$$x_0 = \frac{b_{13}}{b_{33}}, \quad y_0 = \frac{b_{23}}{b_{33}}.$$

x_0, y_0 sind die Koordinaten des Mittelpunktes. Dessen Gleichung lautet also:

$$b_{13}\, u + b_{23}\, v + b_{33}\, s = 0.$$

Durch Einsetzen der Werte von x_0 und y_0 reduziert sich die Gleichung der Kurve auf die Form:

$$(b_{11}\, b_{33} - b^2_{13})\, u^2 + 2\,(b_{12}\, b_{33} - b_{13}\, b_{23})\, uv + (b_{22}\, b_{33} - b^2_{23})\, v^2 + b^2_{33}\, s^2 = 0$$

oder:

$$B_{22}\, u^2 - 2\, B_{21}\, uv + B_{11}\, v^2 + b^2_{33}\, s^2 = 0,$$

worin für s' wieder s geschrieben ist.

Die Mittelpunktskurven.

Plücker behandelt in Nummer 456 zunächst die Mittelpunktskurven, für die die Bedingung gilt:

$$b_{33} \neq 0.$$

1. Eigentliche Kurven.

Um die Kriterien für die einzelnen Kurven abzuleiten, untersucht er, in welchen Fällen die Werte von s in der transformierten Gleichung der Kurve reell oder imaginär sind. Er schreibt jene Gleichung (Gl. (5)):

$$s^2 = -\frac{B_{22}}{b^2_{33}}\left(u^2 - \frac{2\, B_{21}}{B_{22}}\, uv + \frac{B_{11}}{B_{22}}\, v^2\right).$$

Den Ausdruck in der Klammer kann man in zwei Faktoren zerlegen:

$$s^2 = -\frac{B_{22}}{b^2_{33}}\left[u - \frac{B_{21} + \sqrt{B^2_{21} - B_{22} \cdot B_{11}}}{B_{22}} \cdot v\right] \cdot$$

$$\left[u - \frac{B_{21} - \sqrt{B^2_{21} - B_{22} \cdot B_{11}}}{B_{22}} \cdot v\right].$$

Da $B_{11} B_{22} - B^2_{21} = b_{33} \cdot B$, so ist auch:

$$s^2 = -\frac{B_{22}}{b^2_{33}}\left[u - \frac{B_{21} + \sqrt{-b_{33} \cdot B}}{B_{22}} \cdot v\right] \cdot \left[u - \frac{B_{21} - \sqrt{-b_{33} \cdot B}}{B_{22}} v\right.$$

Das Produkt der Klammern ist stets positiv, wenn $\sqrt{-b_{33} \cdot B}$ imaginär ist, d. h. wenn $b_{33} \cdot B > 0$. Ist nun B_{22} ebenfalls > 0, so gibt es keinen reellen Wert von s; die Kurve ist die imaginäre Ellipse.

Ist dagegen $B_{22} < 0$, so erhält man stets reelle Werte von s. Die Kurve ist die reelle Ellipse.

In Nummer 457 finden wir die Fälle $b_{33} \cdot B < 0$. Die Wurzeln in dem Ausdruck für s^2 sind reell, wenn $b_{33} \cdot B < 0$. Es gibt zwei Werte von $\frac{u}{v}$, nämlich $\frac{B_{21} + \sqrt{-b_{33} \cdot B}}{B_{22}}$ und $\frac{B_{21} - \sqrt{-b_{33} \cdot B}}{B_{22}}$, für die s^2 gleich 0 ist. Liegt der Wert von $\frac{u}{v}$ zwischen diesen beiden Ausdrücken, so ist das Produkt der Klammern negativ, ist $\frac{u}{v}$ größer oder kleiner als beide Ausdrücke, so ist das Produkt der Klammern positiv. Im ersteren Falle erhält man reelle Werte von s, wenn $B_{22} > 0$, im zweiten Falle, wenn $B_{22} < 0$. Die Kurve ist die Hyperbel, und die Tangenten, für die $s = 0$ ist, die also durch den Mittelpunkt hindurchgehen, sind ihre Asymptoten.

2. Punktepaare.

Es bleibt noch die Möglichkeit $b_{33} . B = 0$, oder da $b_{33} \neq 0$, $B = 0$ (Nummer 458).

In diesem Falle ist:

$$s^2 = -\frac{B_{22}}{b^2_{33}} \cdot \left(u - \frac{B_{21}}{B_{22}} v\right)^2$$

oder:

$$\left[s - \frac{\sqrt{-B_{22}}}{b_{33}} (u - \frac{B_{21}}{B_{22}} v)\right] . \left[s + \frac{\sqrt{-B_{22}}}{b_{33}} . (u - \frac{B_{21}}{B_{22}} v)\right] = 0.$$

Diese Gleichung stellt ein Punktepaar dar. Dies Punktepaar ist reell, wenn $B_{22} < 0$, dagegen imaginär, wenn $B_{22} > 0$.

Die beiden Punkte liegen zu beiden Seiten des Koordinatenanfangspunktes gleich weit von diesem entfernt. Die Lage der beiden Punkte folgt nach Plücker daraus, daß man bei der Addition ihrer Gleichungen $s = 0$ erhält.

Für den Fall $B_{22} > 0$ gibt es eine einzige Gerade, die den Gleichungen der beiden imaginären Punkte genügt. Diese Gerade, die die Koordinaten hat:

$$\frac{u}{v} = \frac{B_{21}}{B_{22}}, \; s = 0,$$

ist die reelle Verbindungslinie der beiden imaginären Punkte. Plücker sagt, daß die Gleichung der Kurve für diesen Fall $B = 0$, $B_{22} > 0$ eine einzige grade Linie darstellt.

Wird neben $B = 0$ auch $B_{22} = 0$ (N. 459), so folgt, da $b_{33} . B = B_{11} . B_{22} - B^2_{12}$, $B_{12} = 0$. Wird nun auch

noch $B_{11} = 0$, so reduziert sich die transformierte Gleichung der Kurve:

$$B_{22}\,u^2 - 2\,B_{21}\,uv + B_{11}\,v^2 + b^2_{33}\,s^2 = 0$$

auf die Form:

$$b^2_{33}\,s^2 = 0$$

oder, wenn $b_{33} \neq 0$: $s^2 = 0$.

Diese Gleichung stellt einen Doppelpunkt dar, der mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt.

Die Kurven mit unendlich fernem Mittelpunkt.

In den Nummern 464—466 werden die Kurven mit unendlich fernem Mittelpunkt behandelt, für die die Bedingung gilt:

$$b_{33} = 0.$$

Die Gleichung des Mittelpunktes lautet alsdann:

$$b_{13}\,u + b_{23}\,v = 0$$

oder:

$$\frac{u}{v} = -\frac{b_{23}}{b_{13}},$$

d. h. alle Durchmesser dieser Kurven sind parallel. Deren Richtung ist durch den Wert von $\frac{u}{v} : -\frac{b_{23}}{b_{13}}$ bestimmt.

1. Eigentliche Kurven.

Die Gleichung der Kurve reduziert sich für $b_{33} = 0$ auf die Form (Gl. (1)):

$$b_{11}\,u^2 + 2\,b_{12}\,uv + b_{22}\,v^2 + 2\,b_{13}\,us + 2\,b_{23}\,vs = 0.$$

Daraus folgt (Gl. (2)):

$$s = -\frac{1}{2}\,\frac{b_{11}\,u^2 + 2\,b_{12}\,uv + b_{22}\,.\,v^2}{b_{13}\,u + b_{23}\,v}$$

Plücker macht darauf aufmerksam, daß es im allgemeinen für einen Wert von $\frac{v}{u}$ einen einzigen und bestimmten Wert von $\frac{s}{u}$ gibt. Um dies klarer zum Ausdruck zu bringen, kann man die Gleichung schreiben:

$$\frac{s}{u} = -\frac{1}{2}\,\frac{b_{11} + 2\,b_{12}\frac{v}{u} + b_{22}\frac{v^2}{u^2}}{b_{13} + b_{23}\frac{v}{u}}$$

Es gibt danach im allgemeinen nicht zwei parallele Tangenten. Die Kurve ist nach einer Seite offen und erstreckt sich ins Unendliche. Sie ist die Parabel.

Für $v = \infty$ ist auch $s = \infty$, ferner ist auch $s = \infty$ für $b_{13}\,u + b_{23}\,v = 0$, d. h. die Tangenten parallel den Durchmessern liegen im Unendlichen.

In Nummer 465 finden wir den Hinweis darauf, daß die Gleichungen:

$$b_{22}\,v^2 + 2\,b_{13}\,us = 0,$$
$$b_{11}\,u^2 + 2\,b_{23}\,vs = 0$$

Parabeln darstellen, deren Gleichungen auf Koordinatensysteme in spezieller Lage bezogen sind.

2. Punktepaare.

Der Zähler in dem Ausdruck für s: $b_{11}\,u^2 + 2\,b_{12}\,uv + b_{22}\,v^2$ ist durch den Nenner $b_{13}\,u + b_{23}\,v$ ohne Rest teilbar, wenn die beiden Ausdrücke eine gemeinsame Wurzel $\frac{v}{u}$ haben oder die Eliminationsresultante verschwindet. Die Bedingung ist (Gl. (3)):

$$R = b_{22}\,b^2_{13} - 2\,b_{12}\,b_{13}\,b_{23} + b_{11}\,b^2_{23} = 0$$

oder: $-R = b_{13}\,B_{13} + b_{23}\,B_{23} = 0.$

Da nun $b_{13} . B_{13} + b_{23} . B_{23} + b_{33} . B_{33} = B$ ist und $b_{33} = 0$, so ist unsere Bedingung $R = 0$ ersetzbar durch $B = 0$.

Dividiert man in dem Ausdruck für s den Zähler durch den Nenner, so ergibt sich mit Rücksicht auf $R = 0$:

$$s = -\frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}}{b_{13}}\,u + \frac{2\,b_{12}\,b_{13} - b_{11}\,b_{23}}{b^2_{13}}\,v\right)$$

oder: $$s = -\frac{1}{2}\left(\frac{b_{11}}{b_{13}}\,u + \frac{b_{22}}{b_{23}}\,v\right).$$

Man kann die Gleichung der Kurve daher auch schreiben:

$$(b_{13}\,u + b_{23}\,v)\,(b_{11}\,b_{23}\,u + b_{22}\,b_{13}\,v + 2\,b_{13}\,b_{23}\,s) = 0\,.$$

Die Kurve zerfällt demnach in ein System von zwei Punkten (Gl. (4) und (5)):

$$b_{13}\,u + b_{23}\,v = 0,$$
$$b_{11}\,b_{23}\,u + b_{22}\,b_{13}\,v + 2\,b_{13}\,b_{23}\,s = 0\,.$$

Der erste Punkt liegt im Unendlichen. Der zweite ist im allgemeinen endlich und hat die Koordinaten:

$$x_0 = \frac{b_{11}}{2\,b_{13}},\quad y_0 = \frac{b_{22}}{2\,b_{23}}.$$

Um endlich die Bedingung zu finden, unter der auch dieser zweite Punkt ins Unendliche fällt, denkt sich Plücker durch ihn eine gerade Linie gezogen, deren Richtung bestimmt sein soll durch:

$$\frac{v}{u} = -\frac{b_{13}}{b_{23}}.$$

Indem man in die Gleichung des Punktes $b_{11}\,b_{23}\,u + b_{22}\,b_{23}\,v + 2\,b_{13}\,b_{23}\,s = 0$ einsetzt, erhält man für

die Abschnitte, welche jene Gerade auf den Koordinatenachsen bildet, folgende Werte:

$$\frac{s}{u} = \frac{b_{22} \cdot b^2_{13} - b_{11} b^2_{23}}{2\, b_{13} \cdot b^2_{23}},$$

$$\frac{s}{v} = -\frac{b_{22} b^2_{13} - b_{11} b^2_{23}}{2\, b^2_{13} b_{23}}.$$

Plücker sagt ganz richtig, daß auch der zweite Punkt ins Unendliche fallen muß, wenn b_{13} und b_{23} beide zugleich gleich 0 sind, und gründet dies darauf, daß die Abschnitte $\frac{s}{u}$ und $\frac{s}{v}$ auf den Koordinatenachsen unendlich groß werden, wenn die erwähnte Bedingung eintritt. In seiner Ableitung ist er aber hier nicht ganz folgerichtig, denn $\frac{s}{u}$ und $\frac{s}{v}$ werden bereits unendlich groß, wenn entweder b_{13} oder b_{23} gleich 0 ist. Man sieht aber leicht ein, daß, wenn eine der beiden Größen gleich 0 ist, unter der Annahme $b_{11} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$ auch die andere gleich 0 sein muß. Es ist nämlich $B = 0$ und $b_{33} = 0$, folglich auch:

$$b_{13} \cdot B_{13} + b_{23} \cdot B_{23} = 0.$$

Setzen wir nun z. B. $b_{13} = 0$, so ist $b_{23} \cdot B_{23} = 0$ oder $b^2_{23} \cdot b_{11} = 0$. Da nun $b_{11} \neq 0$, so muß $b_{23} = 0$ sein. Die Gleichung:

$$b_{11} u^2 + 2\, b_{12} u v + b_{22} v^2 = 0$$

stellt ein unendlich fernes imaginäres, reelles oder zusammenfallendes Punktepaar dar, je nachdem:

$$B_{33} > 0,\ B_{33} < 0 \text{ oder } B_{33} = 0.$$

In den folgenden Tabellen sind die Bedingungen Plückers für die verschiedenen Kurven zusammengestellt.

$B \neq 0$ Eigentl. Kegelschnitte.

		$B_{22} > 0$	$B_{22} < 0$
$b_{33} \neq 0$	$b_{33} B > 0$	Imag. Ellipse	Reelle Ellipse
	$b_{33} B < 0$	Hyperbel	Hyperbel
$b_{33} = 0$			Parabel

$B = 0$ Punktepaare.

$b_{33} \neq 0$			$b_{33} = 0$			
				$b_{13} = 0$ $b_{23} = 0$		
$B_{22} > 0$	$B_{22} < 0$	$B_{22} = 0$ $B_{11} = 0$	$b_{13} \neq 0$ $b_{23} \neq 0$	$B_{33} > 0$	$B_{33} < 0$	$B_{33} = 0$
Imag. Punktepaar	Reelles Punktepaar	Doppelpunkt	Endl. u. unendl. ferner Punkt	Imag. unendl. fernes Punktepaar	Reelles unendl. fernes Punktepaar	Unendl. ferner Doppelpunkt

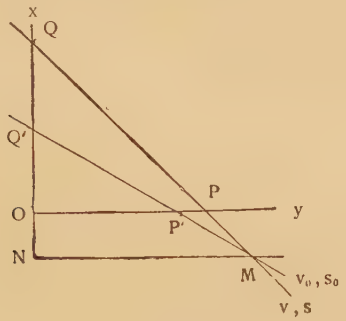
Statt B_{22} kann überall B_{11} gesetzt werden, wie Plücker in Nummer 463 auch angibt.

Die II. Einteilung der Kurven zweiter Klasse bei Plücker.

Koordinatentransformation.

Bei der II. Klassifikation der Kurven zweiter Klasse in § 3 wendet Plücker eine andre Koordinatentransformation als die im ersten Paragraphen angegebene an. Diese Koordinatentransformation behandelt er in Nummer 514. Um ihm hier in seinen Entwickelungen

folgen zu können, müssen wir die eine Koordinate z. B. u ebenfalls gleich 1 setzen.



Die Koordinaten der Geraden v, s sind für $u = 1$:

$$v = \frac{OQ}{OP}, s = -OQ.$$

Entsprechend sind die Koordinaten der Geraden v_0, s_0:

$$v_0 = \frac{OQ'}{OP'}, s_0 = -OQ'.$$

Wir setzen:

$$v - v_0 = v', *)$$
$$s - s_0 = s'.$$

Dann ist:

$$v' = \frac{OQ}{OP} - \frac{OQ'}{OP'}, s' = -Q'Q.$$

Wenn wir wie Plücker die x-Koordinate des Durchschnittes der beiden Geraden einführen und sie mit MN bezeichnen, so folgt:

$$v' = \frac{Q'Q}{MN}.$$

*) Es ist gesetzt für v' bei Plücker: v_0, für w': s_0, für ν: v', für ω: w'. Die x-Achse ist mit der y-Achse vertauscht.

Die geometrische Bedeutung der neuen Koordinaten ergibt sich sofort aus ihren Werten. Die Vorzeichen dieser Werte hängen von der Lage von P zu P' bez. Q zu Q' ab.

Für die Gerade $v_0 s_0$ ist $v' = 0$, $s' = 0$.

Wenn wir in der Gleichung der Kurve $u = 1$ setzen, so lautet diese in analoger Weise wie bei Plücker (Gl. (1)):

$$b_{33} s^2 + 2 b_{32} s v + b_{22} v^2 + 2 b_{31} s + 2 b_{21} v + b_{11} = 0.$$

Es sei nun:

$$s = s_0 + s', *)$$
$$v = v_0 + v'.$$

Diese Werte werden in die Gleichung der Kurve eingesetzt. Dann ist (Gl. (2)):

$$b_{33} s'^2 + 2 b_{32} s' v' + b_{22} v'^2$$
$$+ 2(b_{33} s_0 + b_{32} v_0 + b_{31}) s' + 2 (b_{23} s_0 + b_{22} v_0 + b_{21}) v$$
$$+ b_{33} s^2_0 + 2 b_{32} s_0 v_0 + b_{22} v^2_0 + 2 b_{31} s_0$$
$$+ 2 b_{21} v_0 + b_{11} = 0.$$

Die Glieder mit s' und v' verschwinden, wenn (Gl. (3)):

$$b_{33} s_0 + b_{32} v_0 + b_{31} = 0,$$
$$b_{23} s_0 + b_{22} v_0 + b_{21} = 0.$$

Die erste Gleichung ist, was man leicht aus der allgemeinen Gleichung des Poles herleiten kann, die Gleichung des Poles der unendlich fernen Geraden, die zweite Gleichung ist die Gleichung des Poles der x-Achse.

Die Linie $s_0 v_0$ ist also die Polare des unendlich fernen Punktes der x-Achse.

*) Der Koordinate s' entspricht bei Plücker t.

Für s_0, v_0 folgt aus obigen Gleichungen:

$$s_0 = \frac{B_{31}}{B_{11}}, \quad v_0 = \frac{B_{21}}{B_{11}}.$$

Das neue konstante Glied ist für diese Werte von s_0, v_0 gleich folgendem Ausdruck:

$$b'_{11} = \frac{B}{B_{11}}.$$

In Nummer 516 zeigt Plücker, daß die Gleichung: Die Lage der Linie $s_0 v_0$.

$$s' = \alpha v' \text{ *)}$$

einen Punkt darstellt, der auf der Linie $s_0 v_0$ liegt, da s' und v' beide zugleich 0 sein können. α ist eine Konstante, die gleich der negativen y-Koordinate des Punktes ist, was sich aus der Koordinatentransformation ergibt.

Indem man die Gleichung jenes Punktes mit der transformierten Gleichung der Kurve:

$$b_{33} s'^2 + 2 b_{32} v' s' + b_{22} v'^2 + b'_{11} = 0$$

verbindet, erhält man die Koordinaten der Tangenten:

$$s' = \pm \sqrt{\frac{-b'_{11} \alpha^2}{b_{33} \alpha^2 + 2 b_{32} \alpha + b_{22}}}, \quad v' = \pm \sqrt{\frac{-b'_{11}}{b_{33} \alpha^2 + 2 b_{32} \alpha + b_{22}}}.$$

Die Werte von s' und v' sind gleich und entgegengesetzt, d. h. der Abschnitt, der auf der x-Achse von den beiden Tangenten gebildet wird, wird durch die Linie v_0, s_0 halbiert. Zieht man also durch den Durchschnitt der beiden Tangenten und der Linie $v_0 s_0$ zu

*) α ist für χ gesetzt.

der x-Achse die Parallele, so ist diese die vierte Proportionale zu den drei genannten Linien. Die Richtung der Linie $v_0 s_0$ ist demnach der Richtung der x-Achse zugeordnet, was ja auch schon daraus folgt, daß die Linie $s_0 v_0$ die Polare des unendlich fernen Punktes der x-Achse ist.

Wird α so gewählt, daß:

$$b_{33}\,\alpha^2 + 2\,b_{32}\,\alpha + b_{22} = 0,$$

so ergibt sich:

$$s' = \pm\infty\,,\quad v' = \pm\infty\,.$$

Aus der quadratischen Gleichung erhält man für α zwei Werte α_1 und α_2. Es müßte daher eigentlich vier Tangenten geben, diese fallen jedoch paarweise zusammen und sind der x-Achse parallel. Es folgt daraus, daß die Punkte α_1 und α_2 die Durchschnittspunkte der Linie $v_0 s_0$ mit der Kurve sind, und weiter, daß die Linie $v_0 s_0$ ein Durchmesser ist, dessen zugeordneter der x-Achse parallel ist.

Aus der Natur der Werte von s' und v' leitet Plücker die Kriterien für die einzelnen Kurven zweiter Klasse ab. Da sich der Wert von s' nur durch den Faktor α^2 von dem Wert von v' unterscheidet, so genügt es, die Natur des Wertes von v' zu untersuchen.

Die Fälle $B_{11} \neq 0$.

1. Eigentliche Kurven.

Plücker nimmt zunächst an (Nummer 517), daß die Gleichung:

$$b_{33}\,\alpha^2 + 2\,b_{32}\,\alpha + b_{22} = 0$$

befriedigt werden kann.

Dann begegnet die Gerade $s_0 v_0$ wirklich der Kurve, und es ist (10):

$$B_{11} < 0.$$

Den Nenner in dem Ausdruck für v′ kann man zerlegen. Damit wird:

$$v' = \pm \sqrt{\frac{-b'_{11}}{b_{33}\left(\alpha + \frac{b_{23} - \sqrt{-B_{11}}}{b_{33}}\right)\cdot\left(\alpha + \frac{b_{23} + \sqrt{-B_{11}}}{b_{33}}\right)}}.$$

Das Produkt der Klammern im Nenner unter der Wurzel ist positiv, wenn der Wert von α nicht zwischen

$$-\frac{b_{23} - \sqrt{-B_{11}}}{b_{33}} \text{ und } -\frac{b_{23} + \sqrt{-B_{11}}}{b_{33}} \text{ liegt.}$$

Nun ist $b'_{11} = \frac{B}{B_{11}}$ und $B_{11} < 0$. Für v′ ergeben sich also reelle Werte, wenn $b_{33} \cdot B > 0$ (11). Die Kurve ist die reelle Ellipse.

Ist dagegen $b_{33} B < 0$ (12), so sind die Werte von v′ reell, wenn α zwischen

$$-\frac{b_{23} - \sqrt{-B_{11}}}{b_{33}} \text{ und } -\frac{b_{23} + \sqrt{-B_{11}}}{b_{33}}$$

angenommen wird, andernfalls imaginär. Die Kurve ist die Hyperbel. Die Asymptoten bilden den Übergang von den reellen zu den imaginären Tangenten. Diese Tangenten gehen durch den Mittelpunkt, und für sie ist:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -\frac{b_{23}}{b_{33}}.$$

Wird $b_{33} = 0$ (Nummer 518), so erhält man:

$$s' = \pm \sqrt{\frac{-b'_{11}\,\alpha^2}{2\,b_{32}\,\alpha + b_{22}}}, \quad v' = \pm \sqrt{\frac{-b'_{11}}{2\,b_{32}\,\alpha + b_{22}}}.$$

Für $b_{33} = 0$ wird der eine Wert von α unendlich groß, der andere Wert ergibt sich aus der Gleichung $2\, b_{32}\, \alpha + b_{22} = 0$:

$$\alpha = -\frac{b_{22}}{2\, b_{32}}.$$

Die Linie $s_0\, v_0$ begegnet also der Kurve nur in einem Punkte, und es gibt nur eine Tangente im Endlichen, die der x-Achse parallel ist.

Für $\alpha = \infty$ ist:

$$s' = \pm\infty\,, \quad v' = \pm 0\,.$$

Die Kurve erstreckt sich demnach zu beiden Seiten der x-Achse ins Unendliche.

Den Ausdruck für v' kann man auch schreiben:

$$v' = \pm\sqrt{\frac{-\,b'_{11}}{2\, b_{23}\left(\alpha + \frac{b_{22}}{2\, b_{23}}\right)}}$$

oder, da $b'_{11} = \frac{B}{B_{11}}$:

$$v' = \pm\sqrt{\frac{-B}{2\, B_{11}\,.\, b_{23}\left(\alpha + \frac{b_{22}}{2\ b_{23}}\right)}}.$$

B_{11} muß stets negativ sein, da es für $b_{33} = 0$ gleich $-\,b^2_{23}$ ist.

Ist nun $b_{23}\, B > 0$, so erhält man reelle Werte für v', wenn $\alpha < -\frac{b_{22}}{2\, b_{23}}$; für $b_{23}\,.\,B < 0$ ist v' reell, wenn $\alpha > -\frac{b_{22}}{2\, b_{23}}$.

Da α gleich der negativen y-Koordinate des Durchschnittes der Tangente mit der Linie s_0, v_0 ist, so erkennt man, daß im ersten Falle die Kurve ganz auf

der negativen, im zweiten Falle ganz auf der positiven Seite der y-Achse zu beiden Seiten der Linie $s_0 v_0$ liegt. Die Kurve ist die Parabel.

In Nummer 519 wird der Fall angenommen $B_{11} > 0$.

Das Produkt der Klammern in dem Ausdruck für v':

$$\pm \sqrt{\frac{-b'_{11}}{b_{33}\left(\alpha + \frac{b_{32} - \sqrt{-B_{11}}}{b_{33}}\right)\left(\alpha + \frac{b_{32} + \sqrt{-B_{11}}}{b_{33}}\right)}}$$

ist für $B_{11} > 0$ stets positiv.

Da $b'_{11} = \frac{B}{B_{11}}$, so ergibt sich, daß die Werte von v' sämtlich imaginär sein müssen, wenn $b_{33} . B > 0$ ist. Die Kurve ist die imaginäre Ellipse.

Ist dagegen $b_{33} . B < 0$, so ist v' für jeden Wert von α reell. v' wird ein Maximum, wenn

$$\alpha^2 + \frac{2\, b_{32}\, \alpha}{b_{33}} + b_{22}$$

ein Minimum wird. Dies tritt ein, wenn α gleich der halben Summe der imaginären Wurzeln der Gleichung:

$$\alpha^2 + \frac{2\, b_{32}}{b_{33}}\, \alpha + b_{22} = 0 \text{ ist,}$$

oder wenn:

$$\alpha = -\frac{b_{32}}{b_{33}}.$$

Zieht man also von allen möglichen Punkten der Linie v_0, s_0 Tangenten an die Kurve, so sind die Werte von v' für den Punkt $\alpha = -\frac{b_{32}}{b_{33}}$, der der Mittelpunkt der Kurve ist, am größten.

Diese Werte sind die Grenzwerte. Die Kurve ist die Hyperbel, und die Tangenten, für die v' den größten positiven und negativen Wert hat, sind die Asymptoten.

2. Punktepaare.

Wenn $B = 0$ wird (Nummer 520), so bestehen gleichzeitig die drei Gleichungen:

$$b_{33}\, s_0 + b_{32}\, v_0 + b_{31} = 0,$$
$$b_{23}\, s_0 + b_{22}\, v_0 + b_{21} = 0,$$
$$b_{13}\, s_0 + b_{12}\, v_0 + b_{11} = 0.$$

Der dritte Punkt, der der Pol der y-Achse ist, liegt dann ebenfalls auf der Linie $s_0\, v_0$.

Die Gleichung:

$$b_{33}\, s'^2 + 2\, b_{32}\, s'\, v' + b_{22}\, v'^2 = 0,$$

auf die sich die Gleichung der Kurve für $B = 0$ reduziert, stellt ein Punktepaar dar. Die Punkte dieses Paares sind imaginär, reell oder fallen zusammen, je nachdem:

$$B_{11} > 0,\ B_{11} < 0 \text{ oder } B_{11} = 0.$$

Für $b_{33} = 0$ kann man die Gleichung des Punktepaares zerlegen in:

$$v'\,(2\, b_{32}\, s' + b_{22}\, v') = 0.$$

Der eine Punkt fällt in diesem Falle ins Unendliche. Der Vollständigkeit halber hätte hinzugefügt werden müssen, daß für $b_{23} = 0$ auch der zweite Punkt ins Unendliche fällt.

Die Punktepaare als Degenerationsfälle der eigentlichen Kurven.

In Nummer 521 macht Plücker darauf aufmerksam, daß das Punktepaar aus der Ellipse in der Weise entstanden gedacht werden kann, daß man deren kleine Achse gleich 0 werden läßt. Alle Linien durch die beiden Punkte sind als Tangenten zu betrachten.

Wenn bei der Hyperbel die kleine Achse gleich 0 wird, so geht sie ebenfalls in ein Punktepaar über.

Das Punktepaar kann man auffassen als den Übergang von der Ellipse zu der Hyperbel, indem man die kleine Achse der Ellipse zunächst gleich 0 und dann imaginär werden läßt.

Wird bei einer Hyperbel deren reelle Achse immer kleiner und schließlich gleich 0, so geht die Hyperbel in eine grade Linie, die imaginäre Achse, über. Die imaginäre Achse kann man auffassen als die Verbindungslinie zweier imaginärer Punkte. Diese imaginären Punkte bilden den Übergang von der Hyperbel zu der imaginären Ellipse, indem die reelle Achse der Hyperbel durch 0 hindurchgeht und imaginär wird.

Wenn der Brennpunkt der Parabel dem Scheitelpunkt immer näher rückt, so geht die Parabel schließlich in eine gerade Linie, die Verbindungslinie des endlichen mit dem unendlich fernen Punkt über. Diese Gerade bildet den Übergang zu den Parabeln, welche sich nach der entgegengesetzten Seite hin öffnen.

1. Eigentliche Kurven.

Die Fälle $B_{11} = 0$.

Für $B_{11} = 0$ (Nummer 522) wird die bisherige Koordinatentransformation illusorisch, da die Linie $s_0 v_0$ der x-Achse parallel sein würde. Plücker setzt jetzt:

$$b_{33} s_0 + b_{32} v_0 + b_{31} = 0,$$
$$b_{23} s_0 + b_{22} v_0 + b_{21} = b'_{21}.$$

Eliminiert man eine der beiden Unbekannten aus diesen Gleichungen, so fällt auch die andre heraus, weil $B_{11} = 0$. Für b'_{21} ergibt sich alsdann:

$$b'_{21} = \frac{B_{21}}{b_{33}}.$$

$s_0\ v_0$ kann so gewählt werden, daß die Gleichung (Gl. (23)):

$$b_{33}\,s^2{}_0 + 2\,b_{32}\,s_0\,v_0 + b_{22}\,v^2{}_0 + 2\,b_{31}\,s_0 + 2\,b_{21}\,v_0 + b_{11} = 0$$

befriedigt wird. Dann verschwindet das konstante Glied, und die Gleichung der Kurve erhält die Form (Gl. (24)):

$$b_{33}\,s'^2 + 2b_{32}\,s'\,v' + b_{22}\,v'^2 + 2b'_{21}\,v' = 0\,.$$

Mit Rücksicht auf $B_{11} = 0$ kann man diese Gleichung auch schreiben:

$$(b_{33}\,s' + b_{32}\,v')^2 + 2b_{33}\,b'_{21}\,v' = 0\,.$$

Ist $v' > 0$, so sind die Werte von v' und s' reell für $b_{33}\,.\,b'_{21} < 0$ oder $B_{21} < 0$; ist $v' < 0$, so sind sie reell für $B_{21} > 0$.

$$v' = \infty \text{ und } v' = 0$$

sind die Grenzwerte und geben die Richtung der Asymptoten an. Da $v = \infty$ ist, so ist die eine Asymptote der x-Achse parallel. $v = 0$ bezeichnet die Richtung der Linie $v_0\ s_0$. Da nun diese durch den Mittelpunkt der Kurve hindurch geht, denn ihre Koordinaten $s_0\ v_0$ genügen der Gleichung des Mittelpunktes:

$$b_{33}\,s_0 + b_{32}\,v_0 + b_{31} = 0\,,$$

so ist die Linie $s_0\ v_0$ die zweite Asymptote. Die Kurve ist eine Hyperbel, deren eine Asymptote der x-Achse parallel ist.

2. Punktepaare.

Werden die beiden Gleichungen (Gl. (27)):

$$b_{33}\,s_0 + b_{32}\,v_0 + b_{31} = 0\,,$$
$$b_{23}\,s_0 + b_{22}\,v_0 + b_{21} = 0$$

miteinander identisch, so stellen sie denselben Punkt dar. Dann ist neben $B_{11} = 0$ auch $B_{12} = 0$, $B_{13} = 0$, mithin auch $B = 0$. Die Werte von v_0 und s_0 werden unbestimmt; die Gerade $v_0 s_0$ kann beliebig durch den Punkt, welchen die beiden Gleichungen darstellen, gelegt werden.

Da $B_{11} = 0$ ist, so läßt sich die Gleichung der Kurve auch schreiben:

$$(b_{33} s' + b_{32} v')^2 + b_{33} . b'_{11} = 0 .$$

(Bei Plücker ist der Faktor A bei F' nicht hinzugefügt).

Es war:

$$b'_{11} = \frac{B}{B_{11}}$$

Nun kann für B gesetzt werden $\frac{B_{22} B_{11} - B^2_{21}}{b_{33}}$. Da aber $B_{21} = 0$, so folgt:

$$b_{33} . b'_{11} = B_{22} .$$

Die Gleichung:

$$(b_{33} s' + b_{32} v')^2 + B_{22} = 0$$

ist die Gleichung eines Systems von zwei Punkten, die gleich weit von der Geraden $s_0 v_0$ auf einer Linie parallel der y-Achse liegen. Das Punktepaar ist imaginär oder reell, je nachdem:

$$B_{22} > 0 \text{ oder } B_{22} < 0 .$$

Für B_{22} fallen die beiden Punkte zusammen.

Tangententheorie.

Berührungspunkt der Tangente bei Kurven n ter Klasse.

Die „Neue Tangenten-Theorie“ Plückers, die wir im vierten Paragraphen seiner Entwickelungen über

die Örter zweiter Klasse finden, gründet sich auf das Theorem über die homogenen Funktionen. Dies Theorem setzt Plücker voraus (Nummer 542), indem er sich auf Lacroix, Traité élementaire de Calcul differential et intégral, beruft.

Die Gleichung einer Kurve vom n^{ten} Grade sei auf homogene Linienkoordinaten bezogen und laute (Gl. (1)):

$$F(u, v, s) = 0 .$$ *)

Wenn F_1, F_2, F_3 die partiellen Differentialquotienten nach u, v, s bedeuten, gilt identisch:

$$F_1 u + F_2 v + F_3 s = n . F .$$

$F_{11}, F_{12}, F_{22}, F_{13}$ ... seien die zweifachen, F_{111}, F_{112} ... die dreifachen partiellen Differentialquotienten.

Alsdann ist auch:

$$F_{11} u^2 + 2 F_{12} u v + F_{22} v^2 + 2 F_{13} u s + 2 F_{23} v s + F_{33} s^2 = n (n-1) F$$

und $F_{111} u^3 + 3 F_{112} u^2 v + 3 F_{122} u v^2 + F_{222} v^3 + 3 F_{113} u^2 s +$

$$+ 6 F_{123} u v s + 3 F_{133} u s^2 + 3 F_{223} v^2 s + 3 F_{233} v s^2 + F_{333} s^3$$

$$= n (n-1) (n-2) F . \text{ usw.}$$

In Nummer 543 leitet Plücker die Gleichung des Berührungspunktes der Tangente ab.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$F(u_0 v_0 s_0) = F^0, F_1 (u_0 v_0 s_0) = F^0_1, F_2 (u_0 v_0 s_0) = F^0_2,$$

$$F_{11} (u_0 v_0 s_0) = F^0_{11} \ldots$$

Ist $u_0 v_0 s_0$ **) eine Tangente der gegebenen Kurve, so stellt die Gleichung (Gl. (2)):

$$F^0_1 u + F^0_2 v + F^0_3 s = 0$$

---

*) Wir setzen F (u, v, s) statt U bei Plücker und n statt m.

**) Bei Plücker statt $u_0 v_0 s_0$: u' v' w'.

einen Punkt auf der Tangente $u_0\, v_0\, s_0$ dar, da diese Gleichung, wenn man für $u\, v\, s$: $u_0\, v_0\, s_0$ einsetzt, abgesehen von dem Koeffizienten n mit der Gleichung der Kurve identisch ist.

Differentiiert man diese Gleichung, so ergibt sich:

$$F^0_1\, du + F^0_2\, d\, v + F^0_3\, d\, s = 0\,.$$

Bei der vollständigen Differentiation von F erhält man ebenfalls die Gleichung:

$$F^0_1\, du + F^0_2\, d\, v + F^0_3\, d\, s = 0,$$

indem nach der Differentiation für u, v, s: u_0, v_0, s_0 eingesetzt wird.

Danach ist es gleichgültig, ob man von der gegebenen Tangente $u_0\, v_0\, s_0$ zu der benachbarten Tangente, oder von der Tangente $u_0\, v_0\, s_0$, auf der der betrachtete Punkt liegt, zu einer benachbarten Linie übergeht, die durch den Punkt hindurchgeht. Die Gleichung:

$$F^0_1\, u + F^0_2\, v + F^0_3\, s = 0$$

ist danach die Gleichung des Berührungspunktes der Tangente $u_0\, v_0\, s_0$.

Berührung zweiter und dritter Ordnung

In den Nummern 544 und 545 schließen sich Betrachtungen an über die Berührung zweiter und dritter Ordnung.

Plücker untersucht, in welcher Beziehung die Gleichung (Gl. (3)):

$$F^0_{11}\, u^2 + 2F^0_{12}\, uv + F^0_{22}\, v^2 + 2F^0_{13}\, us + 2F^0_{23}\, vs + F^0_{33}\, s^2 = 0$$

zu der Gleichung der Kurve $F = 0$ steht.

Da jene Gleichung, wenn wir für u, v, s: $u_0\, v_0\, s_0$ setzen, in die Gleichung der Kurve, falls man noch den Faktor $n\,(n-1)$ hinzufügt, übergeht, so ist die Linie $u_0\, v_0\, s_0$ eine gemeinsame Tangente für beide Kurven.

Setzt man zur Abkürzung für

$$F^0_{11}\,u^2 + 2\,F^0_{12}\,u\,v + \ldots = 0:$$

$$G = 0,\ ^*)$$

ferner:

$G\,(u_0\,v_0\,s_0) = G^0$, $G_1\,(u_0\,v_0\,s_0) = G^0_1$, $G_2\,(u_0\,v_0\,s_0) = G^0_2$,

so ist:

$$G^0_1\,u + G^0_2\,v + G^0_3\,s = 0$$

die Gleichung des Berührungspunktes der Tangente $u_0\,v_0\,s_0$. Nun ist F_1 eine homogene Funktion vom $n-1^{ten}$ Grade, folglich:

$$F_{11}\,u + F_{12}\,v + F_{13}\,s = (n-1)\,F_1\,.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich $\frac{1}{2}\,G_1$.

Demnach ist:

$$G_1 = 2\,(n-1)\,F_1\,.$$

Ebenso:

$$G_2 = 2\,(n-1)\,F_2\,,$$

$$G_3 = 2\,(n-1)\,F_3\,.$$

Daraus folgt:

$$G^0_1\,u + G^0_2\,v + G^0_3\,s = 2\,(n-1)\,(F^0_1\,u + F^0_2\,v + F^0_3\,s)\,.$$

Die gemeinsame Tangente $u_0\,v_0\,s_0$ berührt also die beiden Kurven $F = 0$, $G = 0$ in demselben Punkte.

Wenn man die Gleichung $F = 0$ zweimal vollständig differentiiert, so ergibt sich:

$$F_{11}\,du^2 + 2\,F_{12}\,du\,dv + F_{22}\,dv^2 + 2\,F_{13}\,du\,ds + 2\,F_{23}\,dv\,ds + F_{33}\,ds^2 = 0\,.$$

Differentiiert man ebenso die Gleichung $G = 0$, so folgt:

$$F^0_{11}\,du^2 + 2\,F^0_{12}\,du\,dv + F^0_{22}\,dv^2 + 2\,F^0_{13}\,du\,ds + 2\,F^0_{23}\,dv\,ds + F^0_{33}\,ds^2 = 0\,.$$

*) Bei Plücker $W = 0$.

Die beiden Gleichungen werden mit einander identisch, wenn man in der ersten statt u, v, s: u_0, v_0, s_0 setzt.

Die beiden Kurven $F = 0$ und $G = 0$ berühren sich also in der zweiten Ordnung.

Weiter zeigt Plücker, daß die Kurve dritter Klasse, welche durch die Gleichung dargestellt wird (Gl. (4)):

$$F^0_{111}\,u^3 + 3\,F^0_{112}\,u^2 v + 3\,F^0_{122}\,u\,v^2 + F^0_{222}\,v^3 + 3\,F^0_{113}\,u^2 s + 6\,F^0_{123}\,u\,v\,s + 3\,F^0_{133}\,u s^2 + 3\,F^0_{233}\,v^2 s + 3\,F^0_{233}\,v\,s^2 + F^0_{333}\,s^3 = 0,$$

die Kurve $F = 0$ in der dritten Ordnung berührt.

Berührungspunkt der Tangente bei der Kurve zweiter Klasse.

Nach dem Vorhergehenden kann man, wenn eine Kurve n^{ter} Klasse und eine ihrer Tangenten gegeben ist, den Berührungspunkt dieser Tangente bestimmen, ferner auch die Kurven 2ter, 3ter bis $n-1^{ter}$ Klasse die die gegebene Kurve in der 2ten, 3ten bis $n-1^{ten}$ Ordnung berühren. Die Kurve n^{ter} Klasse würde die gegebene Kurve selbst sein.

Schreibt man die Gleichung der Linie zweiter Klasse jetzt wiederum (Nummer 547):

$$b_{11}\,u^2 + 2\,b_{12}\,u v + b_{22}\,v^2 + 2\,b_{13}\,u s + 2\,b_{23}\,v s + b_{33}\,s^2 = 0,$$

so gilt für diese:

$$\frac{1}{2}F_1 = b_{11}\,u + b_{12}\,v + b_{13}\,s,$$

$$\frac{1}{2}F_2 = b_{21}\,u + b_{22}\,v + b_{23}\,s,$$

$$\frac{1}{2}F_3 = b_{31}\,u + b_{32}\,v + b_{33}\,s.$$

Der Berührungspunkt auf einer gegebenen Tangente u_0, v_0, s_0 hat demnach folgende Gleichung:

$$(b_{11} u_0 + b_{12} v_0 + b_{13} s_0) u + (b_{21} u_0 + b_{22} v_0 + b_{23} s_0) v + (b_{31} u_0 + b_{32} v_0 + b_{33} s_0) s = 0 .$$

Gleichung des Poles.

Die Gleichung des Berührungspunktes der Tangente ist in bezug auf u, v, s und u_0, v_0, s_0 symmetrisch. Man kann sie also schreiben (Nummer 548):

$$(b_{11} u + b_{12} v + b_{13} s) u_0 + (b_{21} u + b_{22} v + b_{23} s) v_0 + (b_{31} u + b_{32} v + b_{33} s) s_0 = 0 .$$

Die Gleichung des Berührungspunktes einer zweiten Tangente $u'_0 v'_0 s'_0$ würde lauten:

$$(b_{11} u + b_{12} v + b_{13} s) u'_0 + (b_{21} u + b_{22} v + b_{23} s) v'_0 + (b_{31} u + b_{32} v + b_{33} s) s'_0 = 0 .$$

Die Gleichungen der beiden Tangenten werden befriedigt durch die Koordinaten der Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte u''_0, v''_0, s''_0. Diese Koordinaten werden in obige Gleichungen substituiert und u_0, v_0, s_0 bezw. u'_0, v'_0, s'_0 als Veränderliche betrachtet. Alsdann gehen beide Gleichungen über in:

$$(b_{11} u''_0 + b_{12} v''_0 + b_{13} s''_0) u + (b_{21} u''_0 + b_{22} v''_0 + b_{23} s''_0) v + (b_{31} u''_0 + b_{32} v''_0 + b_{33} s''_0) s = 0 .$$

Diese Gleichung ist die Gleichung des Durchschnittes der beiden Tangenten, also des Pols der Linie $u''_0 v''_0 s''_0$.

Polaren der Achsen und der unendlichfernen Geraden.

Die Gleichung des Poles der x-Achse ($u''_0 = 0$, $v''_0 = 1$, $s = 0$) ist (Nummer 549):

$$b_{21} u + b_{22} v + b_{23} s = 0 .$$

Der Pol der y-Achse ($u''_0 = 1$, $v''_0 = 0$, $s''_0 = 0$) hat folgende Gleichung:

$$b_{11}\, u + b_{12}\, v + b_{13}\, s = 0\,.$$

Für den Pol der unendlich fernen Geraden endlich gilt:

$$b_{31}\, u + b_{32}\, v + b_{33}\, s = 0\,.$$

Diese Gleichung ist zugleich die Gleichung des Mittelpunktes der Kurve.

Relationen zwischen den Coefficienten der Kurve zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Die folgenden Betrachtungen sind in den Nummern 551 und 552 entwickelt.

Wenn ein Punkt (Gl. (1)):

$$x_0\, u + y_0\, v + t_0\, s = 0$$

auf der Kurve:

$$b_{11}\, u^2 + 2\, b_{12}\, u\, v + b_{22}\, v^2 + 2\, b_{13}\, u\, s + 2\, b_{23}\, v\, s + b_{33}\, s^2 = 0$$

liegen soll, so ist mit einem Proportionalitätsfaktor (bei Plücker die Werte $\frac{x}{t}$ und $\frac{y}{t}$ (Gl. (3)), wenn u_0, v_0, s_0 die Koordinaten der Tangente durch diesen Punkt sind:

$$b_{11}\, u_0 + b_{12}\, v_0 + b_{13}\, s_0 - \rho\, x_0 = 0\,,$$
$$b_{21}\, u_0 + b_{22}\, v_0 + b_{23}\, s_0 - \rho\, y_0 = 0\,,$$
$$b_{31}\, u_0 + b_{32}\, v_0 + b_{33}\, s_0 - \rho\, t_0 = 0\,.$$

Hierzu kommt noch die Gleichung:

$$x_0\, u_0 + y_0\, v_0 + t_0\, s_0 = 0\,.$$

Diese vier Gleichungen können wir leicht nach der Determinantentheorie auflösen. Sie sind linear und homogen in u_0, v_0, $s_0 - \rho$. Folglich ist:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & x_0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & y_0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & t_0 \\ x_0 & y_0 & t_0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Diese Gleichung ist die Gleichung der Kurve zweiten Grades in Punktkoordinaten, die ausführlich geschrieben und unter Weglassung des Index 0 lautet:

$$B_{11} x^2 + 2 B_{12} x y + B_{22} y^2 + 2 B_{13} x t + 2 B_{23} y t + B_{33} t^2 = 0 .$$

Für die Ableitung dieser Gleichung hätte man auch die Gleichung:

$$b_{11} u_0^2 + 2 b_{12} u_0 v_0 + b_{22} v_0^2 + 2 b_{13} u_0 s_0 + 2 b_{23} v_0 s_0 + b_{33} s_0^2 = 0$$

benutzen können, da die Gerade $u_0\ v_0\ s_0$ Tangente der Kurve ist. Plücker weist darauf hin und bemerkt auch, daß diese Gleichung von den vier ersten Gleichungen nicht unabhängig ist.

Da unsere Gleichung der Kurve zweiter Ordnung die Form hat:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x t + 2 a_{23} y t + a_{33} t^2 = 0,$$

so haben wir unter Hinzufügung eines Proportionalitätsfaktors ρ' folgende Koefficientenbeziehung (Gl. (6) und (7)):

$$\rho' a_{kl} = B_{kl} .$$

Umgekehrt geht Plücker jetzt von der Gleichung der Kurve zweiter Ordnung aus und stellt die Bedingung auf, unter der die Gerade:

$$u_0 x + v_0 y + s_0 t = 0$$

Tangente der Kurve zweiter Ordnung ist. Die Ableitung der Bedingungsgleichung für die Tangente, die Plücker bereits im ersten Bande, Nummer 271, angegeben hat, ist ganz analog der Ableitung der Bedingungsgleichung für einen Punkt auf der Kurve zweiter Klasse.

Die Bedingungsgleichung für die Tangente

$$A_{11} u^2 + 2 A_{12} u v + A_{22} v^2 + 2 A_{13} u s + 2 A_{23} v s + A_{33} s^2 = 0$$

ist zugleich die Gleichung der Kurve zweiter Klasse.

Danach haben wir die folgende Beziehung zwischen den Koefficienten a_{kl} und b_{kl}

$$b_{kl} = A_{kl} .$$

Nach der Determinantentheorie folgt alsdann

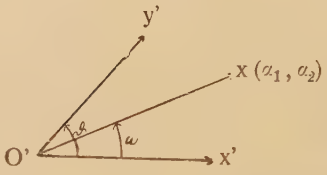
$$B_{kl} = A . a_{kl} ,$$

so daß also der Proportionalitätsfaktor ρ' in $\rho' . a_{kl} = B_{kl}$ durch A zu ersetzen ist.

II. Teil.

§ 1. Allgemeine Transformation der Kurven zweiter Ordnung von schiefwinkligen auf rechtwinklige Koordinaten.

1. Richtungskosinus einer Richtung im schiefwinkligen System.



In bezug auf ein schiefwinkliges System O' x' y' mit dem Achsenwinkel:

$$(1)\quad \vartheta = \sphericalangle\, x'\, y'$$

habe eine beliebige Richtung x den Richtungswinkel:

$$(2)\quad \omega = \sphericalangle\, x'\, x$$

und die Richtungskosinus (I. § 11,[5]) *)

$$(3)\quad \alpha_1 = \cos x'\, x,\quad \alpha_2 = \cos y'\, x\,.$$

Dann ist zunächst:

$$\alpha_1 = \cos\omega,$$

$$\alpha_2 = \cos(\vartheta - \omega) = \cos\vartheta\,.\,\cos\omega + \sin\vartheta\,.\,\sin\omega$$

und demnach:

$$\alpha_1 \sin\vartheta = \cos\omega\,.\,\sin\vartheta,$$

$$\alpha_2 - \alpha_1\cos\vartheta = \sin\omega\,.\,\sin\vartheta\,.$$

*) Beim Hinweis auf Staude, Analyt. Geom. d. Punktes etc. und Staude, Analyt. Geom. des Punktep. etc. wollen wir uns der Abkürzungen I. bez. II. bedienen.

Durch Quadrieren und Addieren folgt:

$$\alpha^2_1 \sin^2 \vartheta + (\alpha_2 - a_1 \cos \vartheta)^2 = \sin^2 \vartheta$$

oder:

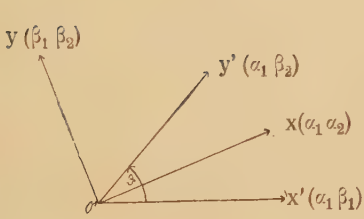
$$(4)\quad \alpha^2_1 - 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \vartheta + \alpha^2_2 = \sin^2 \vartheta .$$

Zwischen den Richtungskosinus α_1 , α_2 einer beliebigen Richtung im schiefwinkligen System vom Achsenwinkel ϑ besteht stets die Gleichung (4).

Sie geht mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ über in

$$(5)\quad \alpha^2_1 + \alpha^2_2 = 1$$

2. Richtungskosinus zweier rechtwinkliger Richtungen im schiefwinkligen System.



In bezug auf das schiefwinklige System O' x' y' seien α_1 , α_2 und β_1 , β_2 die Richtungskosinus zweier zueinander rechtwinkliger Achsen x und y, also:

$$(6)\begin{cases} \alpha_1 = \cos x' x , & \alpha_2 = \cos y' x , \\ \beta_1 = \cos x' y , & \beta_2 = \cos y' y . \end{cases}$$

Dann ist zunächst nach (4):

$$(7)\begin{cases} \alpha^2_1 - 2\alpha_1 \alpha_2 \cos \vartheta + \alpha^2_2 = \sin^2 \vartheta , \\ \beta^2_1 - 2\beta_1 \beta_2 \cos \vartheta + \beta^2_2 = \sin^2 \vartheta . \end{cases}$$

Da aber andererseits α_1 , β_1 und α_2 , β_2 die Richtungskosinus der schiefwinkligen Achsen x' und y' im rechtwinkligen System O x y sind, so ist (I. § 13, (3); (4)):

(8) $\alpha^2_1 + \beta^2_1 = 1$, $\alpha^2_2 + \beta^2_2 = 1$,

(9) $\gamma = \cos\vartheta = \alpha_1\,\alpha_2 + \beta_1\,\beta_2$,

(10) $S = \sin\vartheta = \alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1$, $S^2 = 1 - \gamma^2$,

wo γ und S zur Abkürzung geschrieben sind.

Die Gleichungen (7) nehmen dann die Form an:

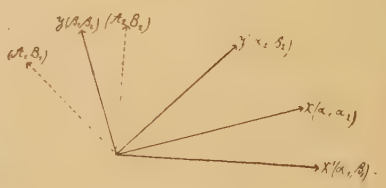
$$(11)\begin{cases}\alpha^2_1 - 2\,\gamma\,\alpha_1\,\alpha_2 + \alpha^2_2 = S^2,\\ \beta^2_1 - 2\,\gamma\,\beta_1\,\beta_2 + \beta^2_2 = S^2.\end{cases}$$

Zwischen den Richtungskosinus α_1, α_2 und β_1, β_2 der Achsen x, y eines rechtwinkligen Systems O'xy in bezug auf ein schiefwinkliges System O'x'y' bestehen die Relationen (11).

3. Die Unterdeterminanten von S.

Die Unterdeterminanten der Determinante:

(12) $S = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}$



sind:

(13) $A_1 = \beta_2$, $B_1 = -\alpha_2$,
$A_2 = -\beta_1$, $B_2 = \alpha_1$.

Sie sind (I. § 13, (5)) die Richtungskosinus $A_2\,B_2$ und $A_1\,B_1$ der Normalen der beiden Achsen x', y' in bezug auf das rechtwinklige System O'xy.

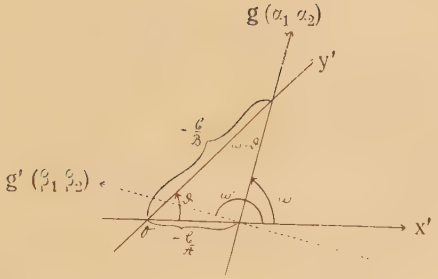
In Folge von (13) ergibt sich aus (8)—(11):

(14) $A^2_1 + B^2_1 = 1$, $A^2_2 + B^2_2 = 1$,

(15) $\gamma = -(A_1\,A_2 + B_1\,B_2)$,

(16) $S = A_1\,B_2 - A_2\,B_1$,

$$(17)\begin{cases}A^2_1 + 2\,\gamma\,A_1\,A_2 + A^2_2 = S^2,\\ B^2_1 + 2\,\gamma\,B_1\,B_2 + B^2_2 = S^2.\end{cases}$$



3a. Richtungskosinus und unendlich ferne Punkte.

Ist im schiefwinkligen System:

$$A\,x' + B\,y' + C\,t' = 0$$

eine Gerade g mit dem Winkel $\sphericalangle\, x'\,g = \omega$, so ist:

$$-\frac{C}{A} : -\frac{C}{B} = \sin(\omega - \vartheta) : \sin\omega$$

oder:

$$A : B = \sin\omega : \sin(\omega - \vartheta)\,.$$

Nun sind die Richtungskosinus der Geraden g und ihrer Normalen g':

$$\alpha_1 = \cos\omega\,,\quad \alpha_2 = \cos(\omega - \vartheta)\,;\quad \beta_1 = \cos\omega' = -\sin\omega\,,$$
$$\beta_2 = \cos(\omega' - \vartheta) = -\sin(\omega - \vartheta)\,,$$

da $\omega' = \omega + \frac{\pi}{2}$, und daher:

$$\beta_1 : \beta_2 = A : B\,.$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der unendlich fernen Geraden $t' = 0$ sind:

$$A\,x' + B\,y' = 0:\quad x' : y' = -B : A$$

und daher:

$$\beta_2 : -\beta_1 = x' : y'\,.$$

Nimmt man daher g und g' als Achsen x und y wie unter 3., so wird nach (13):

$$A_1 : A_2 = x' : y'\,.$$

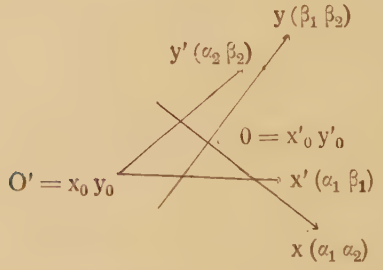
Sind α_1, α_2 und β_1, β_2 die Richtungskosinus der Achsen x und y des rechtwinkligen Systems Oxy, ferner A_1, A_2, B_1, B_2 die Unterdeterminanten (13), endlich $x' : y' : 0$ die schiefwinkligen Koordinaten des unendlich fernen Punktes der x-Achse, so ist:

$$A_1 : A_2 = x' : y'.$$

Dies entspricht dem Satze I, § 22, 6.

4. Die Transformation der Koordinaten.

Die Transformationsformeln beim Übergang vom rechtwinkligen System Oxy zum schiefwinkligen System O' x' y' und umgekehrt, lauten, wenn $x_0\, y_0$ die Koordinaten von O' und $\alpha_1\, \beta_1$ und $\alpha_2\, \beta_2$ die Richtungskosinus der Achsen x' und y'. in bezug auf das System Oxy und $x'_0\, y'_0$ die Koordinaten von O und $\alpha_1\, \alpha_2$ und $\beta_1\, \beta_2$ die Richtungskosinus der Achsen x und y in bezug auf das System O' x' y' sind (II. § 22, (2); (3)):



$$(18)\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 y', \\ y = y_0 + \beta_1 x' + \beta_2 y'; \end{cases} \qquad (19)\begin{cases} Sx' = Sx'_0 + A_1 x + B_1 y, \\ Sy' = Sy'_0 + A_2 x + B_2 y. \end{cases}$$

Dabei ist (II. § 15, (12)):

$$(20)\begin{cases} S x'_0 = -A_1 x_0 - B_1 y_0, \\ S y'_0 = -A_2 x_0 - B_2 y_0; \end{cases} \qquad (21)\begin{cases} x_0 = -\alpha_1 x'_0 - \alpha_2 y'_0, \\ y_0 = -\beta_1 x'_0 - \beta_2 y'_0. \end{cases}$$

5. Transformation der Gleichung der Kurve 2. Ordnung von einem schiefwinkligen auf ein rechtwinkliges System.

Die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung lautet in schiefwinkligen Koordinaten:

$$(22)\quad g(x'\,y') = a'_{11}\,x'^2 + 2\,a'_{12}\,x'\,y' + a'_{22}\,y'^2 + 2\,a'_{13}\,x' + 2\,a'_{23}\,y' + a'_{33} = 0\,.$$

Die halben partiellen Differentialquotienten der Funktion $g(x'\,y')$ seien:

$$(23)\quad \begin{cases} g_1(x'\,y') = a'_{11}\,x' + a'_{12}\,y' + a'_{13}\,, \\ g_2(x'\,y') = a'_{21}\,x' + a'_{22}\,y' + a'_{23}\,, \\ g_3(x'\,y') = a'_{31}\,x' + a'_{32}\,y' + a'_{33}\,. \end{cases}$$

Ferner sei:

$$(24)\quad h(x'\,y') = a'_{11}\,x'^2 + 2\,a'_{12}\,x'\,y' + a_{22}\,y'^2$$

und:

$$(25)\quad \begin{cases} h_1(x'\,y') = a'_{11}\,x' + a'_{12}\,y'\,, \\ h_2(x'\,y') = a'_{21}\,x' + a'_{22}\,y'\,. \end{cases}$$

Wir setzen die Werte (19) von x' und y' in die Gleichung (22) der Kurve ein, die wir gleichzeitig mit S^2 multiplizieren. Dann ist:

$$S^2\,.\,g(x'\,y') = a'_{11}\,(S\,x'_0 + A_1\,x + B_1\,y)^2 + 2\,a'_{12}\,(S\,x'_0 + A_2\,x + B_2\,y)\,.\,(S\,y'_0 + A_2\,x + B_2\,y) + a'_{22}\,(S\,y'_0 + A_2\,x + B_2\,y)^2 + 2\,S\,a'_{13}\,(S\,x'_0 + A_2\,x + B_2\,y) + 2\,S\,a'_{23}\,(S\,y'_0 + A_2\,x + B_2\,y) + S^2\,a'_{33} = 0\,.$$

Es sei nun unter Einführung der Bezeichnung $S^2\,a_{kl}$ für die neuen Koefficienten:

$$(26)\quad S^2\,g(x'\,y') = S^2\,(a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33}) = 0\,.$$

Alsdann haben die Koefficienten die folgenden Werte:

$$(27)\quad S^2 a_{11} = a'_{11} A^2_1 + 2 a'_{12} A_1 A_2 + a_{22} A^2_2 = h (A_1 A_2),$$

$$\begin{aligned} S_2 a_{12} &= a'_{11} A_1 B_1 + a'_{12} (A_1 B_2 + A_2 B_1) + a'_{22} A_2 B_2 \\ &= h_1 (A_1 A_2) B_1 + h_2 (A_1 A_2) B_2 \\ &= h_1 (B_1 B_2) A_1 + h_2 (B_1 B_2) A_2 , \end{aligned}$$

$$S^2 a_{22} = a'_{11} B^2_1 + 2 a'_{12} B_1 B_2 + a'_{22} B^2_2 = h (B_1 B_2),$$

$$\begin{aligned} S\, a_{13} &= a'_{11} A_1 x'_0 + a'_{12} A_1 y'_0 + a'_{13} A_1 \\ &\quad + a'_{21} A_2 x'_0 + a'_{22} A_2 y'_0 + a'_{23} A_2 \\ &= g_1 (x'_0 y'_0) A_1 + g_2 (x'_0 y'_0) A_2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S\, a_{23} &= a'_{11} x'_0 B_1 + a'_{12} y'_0 B_1 + a'_{13} B_1 + a'_{21} x'_0 B_2 \\ &\quad + a'_{22} y'_0 B_2 + a'_{23} B_2 = g_1 (x'_0 y'_0) B_1 + g_2 (x'_0 y'_0) B_2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{33} &= a'_{11} x'^2_0 + 2 a'_{12} x'_0 y'_0 + a'_{22} y'^2_0 + 2 a'_{13} x'_0 \\ &\quad + 2 a'_{23} y'_0 + a'_{33} = g (x'_0 y'_0) . \end{aligned}$$

§ 2. Das Hauptachsenproblem.

1. Die Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoefficienten.

Die Richtungskosinus α_1, α_2 und β_1, β_2 der rechtwinkligen Achsen x und y im System O' x' y' soll nun so bestimmt werden, daß in (26):

$$(28)\quad S^2 a_{12} = 0 .$$

Sie heißen Hauptachsenrichtungen der Linie 2. O. und die zugehörigen Koefficienten die Hauptachsenkoefficienten. Diese genügen den Gleichungen:

$$(29)\quad S^2 a_{11} = h (A_1 A_2),\ S^2 a_{22} = h (B_1 B_2) .$$

An Stelle von α_1, α_2 und β_1, β_2 können nach (13) auch B_2, $-B_1$ und $-A_2$, A_1 der Unbekannte gelten.

Wir stellen die Gleichungen (29) mit der Gleichung (28) in folgender Weise zusammen:

$$(30)\quad \begin{cases} h_1 (A_1 A_2) A_1 + h_2 (A_1 A_2) A_2 = S^2 a_{11} \\ h_1 (A_1 A_2) B_1 + h_2 (A_1 A_2) B_2 = 0; \\ h_1 (B_1 B_2) A_1 + h_2 (B_1 B_2) A_2 = 0 \\ h_1 (B_1 B_2) B_1 + h_2 (B_1 B_2) B_2 = S^2 a_{22} . \end{cases}$$

Das erste Paar der Gleichungen wird mit A_2, B_2 oder A_1, B_1, das zweite mit B_1, A_1 oder B_2, A_2 multipliziert, und die Gleichungen der beiden Paare werden in sich addiert. Dann folgt:

$$\begin{aligned} -h_1 (A_1 A_2) \gamma + h_2 (A_1 A_2) &= S^2 a_{11} A_2 , \\ h_1 (A_1 A_2) - h_2 (A_1 A_2) \gamma &= S^2 a_{11} A_1 , \\ -h_1 (B_1 B_2) \gamma + h_2 (B_1 B_2) &= S^2 a_{22} B_2 , \\ h_1 (B_1 B_2) - h_2 (B_1 B_2) \gamma &= S^2 a_{22} B_1 . \end{aligned}$$

Durch Multiplikation der Gleichungen mit γ, 1 oder 1, γ und Addition ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned} (1 - \gamma^2) h_1 (A_1 A_2) &= S^2 a_{11} (A_1 + A_2 \gamma), \\ (1 - \gamma^2) h_2 (A_1 A_2) &= S^2 a_{11} (A_1 \gamma + A_2), \\ (1 - \gamma^2) h_1 (B_1 B_2) &= S^2 a_{22} (B_1 + B_2 \gamma), \\ (1 - \gamma^2) h_2 (B_1 B_2) &= S^2 a_{22} (B_1 \gamma + B_2), \end{aligned}$$

oder nach (10):

$$(31)\quad \begin{cases} a'_{11} A_1 + a'_{12} A_2 = a_{11} (A_1 + A_2 \gamma), \\ a'_{21} A_1 + a'_{22} A_2 = a_{11} (A_1 \gamma + A_2), \\ a'_{11} B_1 + a'_{12} B_2 = a_{22} (B_1 + B_2 \gamma), \\ a'_{21} B_1 + a'_{22} B_2 = a_{22} (B_1 \gamma + B_2). \end{cases}$$

Diesen Gleichungen kann man schließlich die Form geben:

$$(32)\quad \begin{cases} (a'_{11} - a_{11})\,A_1 + (a'_{12} - a_{11}\,\gamma)\,A_2 = 0, \\ (a'_{21} - a_{11}\,\gamma)\,A_1 + (a'_{22} - a_{11})\,A_2 = 0, \\ (a'_{11} - a_{22})\,B_1 + (a'_{12} - a_{22}\,\gamma)\,B_2 = 0, \\ (a'_{21} - a_{22}\,\gamma)\,B_1 + (a'_{22} - a_{22})\,B_2 = 0. \end{cases}$$

Für die Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoefficienten gelten die Gleichungen (32).

Zur Bestimmung des Proportionalitätsfaktors der Verhältnisse $A_1 : A_2$ oder $B_1 : B_2$ in den Gleichungen (32) kommen noch die Gleichungen (17) hinzu, also:

$$A^2_1 + A^2_2 + 2\,A_1\,A_2\,\gamma = S^2,\quad B^2_1 + B^2_2 + 2\,B_1\,B_2\,\gamma = S^2.$$

2. Die quadratische Gleichung des Hauptachsenproblems.

Wie aus den Gleichungen (32) folgt, genügen a_{11} und a_{22} beide der in λ quadratischen Gleichung:

$$(33)\quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{12} - \gamma\,\lambda \\ a'_{21} - \gamma\,\lambda & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

3. Realität der Wurzeln von $\Delta(\lambda)$.

Mit Rücksicht auf (10) und

$$(34)\quad A'_{33} = a'_{11}\,a'_{22} - a'^2_{12}$$

lautet die Gleichung (33) entwickelt:

$$(35)\quad \Delta(\lambda) = S^2\,\lambda^2 - (a'_{11} + a'_{22} - 2\,a'_{12}\,\gamma)\,\lambda + A'_{33} = 0.$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$(35a)\quad J_{33} = \frac{A'_{33}}{S^2},\quad J'_{33} = \frac{a'_{11} + a'_{22} - 2\,a'_{12}\,\gamma}{S^2}$$

und haben dann die Gleichung:

$$(36)\quad \lambda^2 - J'_{33}\,\lambda + J_{33} = 0.$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist:

$$(a'_{11} + a'_{22} - 2\,a'_{12}\,\gamma)^2 - 4\,S^2\,A'_{33} = a'^2_{11} + a'^2_{22} + 2\,a'_{11}\,a'_{22}$$
$$+ 4\,a'^2_{12}\,\gamma^2 - 4\,a'_{11}\,a'_{12}\,\gamma - 4\,a'_{22}\,a'_{12}\,\gamma - 4\,a'_{11}\,a'_{22} + 4\,a'^2_{12}$$
$$+ 4\,a'_{11}\,a'_{22}\,\gamma^2 + 4\,a'^2_{12}\,\gamma^2$$
$$= (a'_{11} - a'_{22})^2 - (a'_{11} - a_{22})^2\,\gamma^2 + (2\,a'_{12} - \gamma\,(a'_{11} + a'_{22}))^2$$
$$= (a'_{11} - a'_{22})^2\,S^2 + (2\,a'_{12} - \gamma\,(a'_{11} + a'_{22}))^2 .$$

Die Diskriminante der Gleichung (33) wird demnach niemals negativ. Ihre Wurzeln λ_1 und λ_2 sind daher stets reell.

4. Gleiche Wurzeln von $\Delta(\lambda)$.

Die Diskriminante (36) wird gleich 0, wenn

$$a'_{11} = a'_{22},\quad 2\,a'_{12} = \gamma\,(a'_{11} + 'a_{22})$$

oder (II § 22, (41)):

$$(37)\quad a'_{11}\,\gamma = a'_{22}\,\gamma = a'_{12} .$$

Der Wert der Doppelwurzel ist alsdann:

$$(38)\quad \lambda_1 = \lambda_2 = a'_{11} = a'_{22} .$$

5. Positive und negative und verschwindende Wurzeln.

Für die Wurzel der Gleichung (35) gilt:

$$(39)\quad \lambda_1 + \lambda_2 = J'_{33},\quad \lambda_1\,\lambda_2 = J_{33} .$$

Wenn $J_{33} \neq 0$, so verschwindet keine der beiden Wurzeln λ_1 und λ_2, und ihre Vorzeichen sind für:

$$(40)\quad \begin{cases} J_{33} > 0, & J'_{33} > 0 : + \quad + \\ J_{33} > 0, & J'_{33} < 0 : - \quad - \\ J_{33} < 0 & \quad\;\; : + \quad - . \end{cases}$$

Dagegen ist für:

$$(41)\quad \begin{cases} J_{33} = 0, & J'_{33} \neq 0 : \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = J'_{33} \\ J_{33} = 0, & J'_{33} = 0 : \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0 . \end{cases}$$

§ 3. Das Mittelpunktsproblem.

1. Der Mittelpunkt.

Die Koefficienten Sa_{13} und Sa_{23} in der transformierten Gleichung (26) verschwinden nach (27), wenn:

$$(42)\quad \begin{cases} g_1(x'_0\,y'_0)\,A_1 + g_2(x'_0\,y'_0)\,A_2 = 0, \\ g_1(x'_0\,y'_0)\,B_1 + g_2(x'_0\,y'_0)\,B_2 = 0. \end{cases}$$

Da nach (16) $A_1 B_2 - A_2 B_1 = S \neq 0$, so muß alsdann sein:

$$(43)\quad \begin{cases} g_1(x'_0\,y'_0) = a'_{11}\,x'_0 + a'_{12}\,y'_0 + a'_{13} = 0, \\ g_2(x'_0\,y'_0) = a'_{21}\,x'_0 + a_{22}\,y'_0 + a'_{23} = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt für die Koordinaten des Mittelpunktes:

$$(44)\quad x'_0 = \frac{A'_{13}}{A'_{33}},\quad y'_0 = \frac{A'_{23}}{A'_{33}}.$$

Der Mittelpunkt der Kurve liegt im Endlichen, wenn:

$$(45)\quad A'_{33} \neq 0 \text{ oder } J_{33} \neq 0,$$

ist dagegen unendlich fern, wenn

$$(46)\quad A'_{33} = 0 \text{ oder } J_{33} = 0.$$

2. Die Mittelpunktsgleichung der Mittelpunktskurven.

Die Bedingungen für das Verschwinden der Koefficienten der linearen Glieder der transformierten Gleichung lauten:

$$(47)\quad g_1(x'_0\,y'_0) = 0,\ g_2(x'_0\,y'_0) = 0.$$

Die Gleichung der Kurve ist in diesem Falle auf den Mittelpunkt transformiert, und die Gleichung:

$$(48)\quad g(x\,y) = a'_{11}\,\xi^2 + a'_{22}\,\eta^2 + 2\,a'_{12}\,\xi\,\eta + a_{33} = 0$$

heißt die Mittelpunktsgleichung der Kurve.

3. Das konstante Glied der Mittelpunktsgleichung.

Mit Rücksicht auf (47) wird:

$$(49)\quad a_{33} = g^0 = g^0_1 x'_0 + g^0_2 y'_0 + g^0_3 = g^0_3 = a'_{31} x'_0 + a'_{32} y'_0 + a'_{33}.$$

Das konstante Glied a_{33} kann man also durch Elimination von x'_0, y'_0 aus den drei Gleichungen (47) und (49) bestimmen, also aus (II. § 24, (6))

$$(50)\quad \left\{ \begin{array}{l} a'_{11} x'_0 + a'_{12} y'_0 + a'_{13} = 0, \\ a'_{21} x'_0 + a'_{22} y'_0 + a'_{23} = 0, \\ a'_{31} x'_0 + a'_{32} y'_0 + a'_{33} - a_{33} = 0. \end{array} \right.$$

4. Das konstante Glied im Falle eines einzigen Mittelpunktes.

Die drei Gleichungen (50) sind linear und homogen in $x'_0, y'_0, 1$. Folglich ist (II. § 24 (7)):

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} - a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

oder entwickelt:

$$(51)\quad a_{33} = \frac{A'}{A'_{33}} = \frac{J}{J_{33}},$$

wo:

$$(52)\quad J = \frac{A'}{S^2}$$

eine Invariante ist (II. § 22, (16)).

5. Das konstante Glied im Falle einer Mittelpunktsachse.

Die Bedingungen einer endlichen Mittelpunktsachse sind nach II. 23, (5), (16), (22'):

$$(53)\quad A'_{13} = 0, A'_{23} = 0, A'_{33} = 0 \text{ oder } A'_{33} = 0, A' = 0;$$
$$a'_{11}, a'_{12}, a'_{13} \text{ nicht alle } 0.$$

Da hiermit:

$$a'_{11} a'_{22} = a'^2_{12},$$

so ist:

$$a'_{11}(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\cos\omega) = a'^2_{11} + a'^2_{12} - 2a'_{11}a'_{12}\cos\omega$$
$$= (a'_{11} - a'_{12})^2\cos^2\frac{\omega}{2} + (a'_{11} + a'_{12})^2\sin^2\frac{\omega}{2},$$

$$a'_{22}(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\cos\omega) = a'^2_{21} + a'^2_{22} - 2a'_{22}a'_{12}\cos\omega$$
$$= (a'_{21} - a'_{22})\cos^2\frac{\omega}{2} + (a'_{21} + a'_{22})^2\sin^2\frac{\omega}{2}$$

und daraus:

$$(a'_{11} + a'_{22})(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\cos\omega)$$
$$= \{(a'_{11} - a'_{12})^2 + (a'_{21} - a'_{22})^2\}\cos^2\frac{\omega}{2}$$
$$+ \{(a'_{11} + a'_{12})^2 + (a'_{21} + a'_{22})^2\}\sin^2\frac{\omega}{2}.$$

Die rechte Seite verschwindet, da $\omega \neq 0$ oder π, immer dann und nur dann, wenn:

$$a'_{11} - a'_{12} = 0,\ a'_{21} - a'_{22} = 0,\ a'_{11} + a'_{12} = 0,$$
$$a'_{21} + a'_{22} = 0,$$

also:

$$(54)\quad a'_{11} = 0,\ a'_{12} = 0,\ a'_{22} = 0.$$

Für eine endliche Mittelpunktsachse ist daher:

$$(55)\quad A'_{33} = 0\ (J_{33} = 0),\ A' = 0\ (J = 0),\ (a'_{11} + a'_{22}).$$
$$(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\gamma) \neq 0$$

und somit:

$$J'_{33} \neq 0 \text{ und überdies:}$$
$$a'_{11} + a'_{22} \text{ und } a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\gamma\ (J'_{33})$$

von gleichem Vorzeichen.

Zur Bestimmung von a_{33} eliminieren wir aus der ersten und dritten der Gleichungen (50) $x'_0, 1$, aus der zweiten und dritten $x'_0, 1$ und erhalten:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12}\,y'_0 + a'_{13} \\ a'_{31} & a'_{33}\,y'_0 + a'_{33} - a_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{21}\,x'_0 + a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{31}\,x'_0 + a'_{33} - a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a'_{21} & a'_{22}\,y'_0 + a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32}\,y'_0 + a'_{33} - a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt, da $A'_{23} = 0$ und $A'_{13} = 0$:

$$A'_{22} - a'_{11}\,a_{33} = 0, A'_{11} - a'_{22}\,a_{33} = 0, A'_{12} + a'_{12}\,a_{33} = 0.$$

Durch Addition folgt, wenn wir zugleich die dritte Gleichung mit 2γ multiplizieren:

$$(56)\quad A'_{11} + A'_{22} + 2A'_{12}\,\gamma = (a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\,\gamma)\,a_{33}$$

Im Falle einer endlichen Mittelpunktsachse wird daher:

$$(57)\quad A_{33} = \frac{A'_{11} + A'_{22} + 2A'_{12}\,\gamma}{a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\,\gamma}$$

oder:

$$(58)\quad a_{33} = \frac{J'}{J'_{33}},$$

wenn J' die bedingte Invariante ist:

$$(59)\quad J' = \frac{A'_{11} + A'_{22} + 2A'_{12}\,\gamma}{S^2} \quad (\text{II } \S\ 22, (22)).$$

6. Hauptachsengleichungen der Mittelpunktskurven.

Verlegen wir die neuen Koordinaten in die Hauptachsenrichtungen, indem wir gleichzeitig die Gleichung der Kurve auf den Mittelpunkt transformieren, so erhalten wir als Hauptachsengleichung der Kurven mit einem Mittelpunkt:

$$(60)\quad J_{33} \neq 0 : \lambda_1\,\xi^2 + \lambda_2\,\eta^2 + \frac{J}{J_{33}} = 0.$$

Die Hauptachsengleichung der Kurven mit einer Mittelpunktsachse lautet:

$$(61)\quad J_{33} = 0, J = 0, J'_{33} \neq 0 : \lambda_2 \eta^2 + \frac{J'}{J'_{33}} = 0$$

Für die Kurven mit unbestimmtem Mittelpunkt endlich hat die Hauptachsengleichung in homogenen Koordinaten die Form:

$$(62)\quad J_{33} = 0,\ J = 0,\ J'_{33} = 0,\ J' = 0,$$
$$a'_{33} \neq 0 ; a_{33} \tau^2 = 0.$$

§ 4. Die Kurven ohne endlichen Mittelpunkt.

1. Unendlich ferner Mittelpunkt und unendlich ferne Mittelpunktsachse.

Die gemeinsame Bedingung für die Kurven ohne endlichen Mittelpunkt lautet:

$$(63)\ A'_{33} = 0\ (J_{33} = 0)$$

Es ist ein einziger unendlich ferner Mittelpunkt vorhanden, wenn:

$$(64)\quad A'_{33} = 0,\ A'_{13} \text{ und } A'_{23} \text{ nicht beide } 0.$$

Dagegen liegt eine unendlich ferne Mittelpunktsachse vor, wenn:

$$(65)\quad a'_{11} = 0,\ a'_{12} = 0,\ a'_{22} = 0;\ a'_{13}, a'_{23} \text{ nicht beide } 0$$

2. Umformung der Bedingungen eines unendlich fernen Mittelpunktes.

Nach II, § 23, 6 ist:

$$A'\, a'_{11} = A'_{22} A'_{33} - A'^2_{23},\quad A'\, a'_{22} = A'_{33} A'_{11} - A'^2_{31},$$
$$A'\, a'_{12} = A'_{23} A'_{31} - A'_{12} A'_{33},$$

somit für $A'_{33} = 0$:

$$A'\, a'_{11} = -A'^2_{23},\ A'\, a'_{22} = -A'^2_{31},\ A'\, a'_{12} = A'_{23} A'_{31}.$$

Daraus folgt:

$$(66)\quad A'(a'_{11} + a'_{22} - 2\,a'_{12}\cos\omega) = -(A'^2_{23} + A'^2_{31} + 2\,A'_{13}\,A'_{23}\cos\omega)$$

oder

$$A'(a'_{11} + a'_{22} - 2\,a'_{12}\cos\omega) = -\left\{(A'_{23} + A'_{31})^2\cos^2\frac{\omega}{2} + (A'_{23} - A'_{31})^2\sin^2\frac{\omega}{2}\right.,$$

wo die rechte Seite nur verschwindet, wenn:

$$(67)\quad A'_{13} = 0 \text{ und } A'_{23} = 0.$$

Daher ist bei einem unendlich fernen Mittelpunkt stets:

$$(68)\quad J_{33} = 0,\quad J\,J'_{33} < 0$$

und überdies:

$$S^4\,J\,J'_{33} = -(A'^2_{13} + A'^2_{23} + 2\,A'_{13}\,A'_{23}\,\gamma).$$

3. Umformung der Bedingungen für eine unendlich ferne Mittelpunktsachse

Für eine unendlich ferne Mittelpunktsachse ist (II § 23, (18)):

$$(69)\quad a'_{11} = 0,\ a'_{12} = 0,\ a'_{22} = 0;\ a^2_{13} + a^2_{23} \neq 0.$$

Damit wird:

$$(70)\quad J'_{33} = 0,$$

dagegen, da allgemein:

$$(71)\quad a'^2_{13} + a'^2_{23} - 2\,a'_{12}\,a'_{23}\cos\omega = (a'_{13} + a'_{23})^2\sin^2\frac{\omega}{2} + (a'_{15} - a'_{23})^2\cos^2\frac{\omega}{2},\quad a'^2_{13} + a'^2_{23} - 2\,a'_{13}\,a'_{23}\,\gamma \neq 0.$$

Da aber:

$$(72)\quad A'_{11} = -a'^2_{23},\quad A'_{22} = -a'^2_{13},\quad A'_{12} = a'_{13}\,a'_{23},$$

so heißt dies:

$$(73)\quad J' = \frac{A'_{11} + A'_{22} + 2A'_{12}\gamma}{S^2}$$

$$= -\frac{a'^2_{13} + a'^2_{23} - 2a'_{13}a'_{23}\gamma}{S^2} \neq 0.$$

Für die unendlich ferne Mittelpunktsachse ist also:

$$(74)\quad A'_{33} = 0\ (J_{33} = 0),\quad A' = 0\ (J = 0),\quad J'_{33} = 0,\quad J' \neq 0.$$

4. Einführung der Hauptachsenrichtungen.

Legen wir die Koordinatenachsen in die Hauptachsenrichtungen, so erhalten wir bei verfügbar bleibendem Koordinatenanfangspunkt für die Gleichung der Kurven ohne endlichen Mittelpunkt (für $A'_{33} = 0$: $\lambda_1 = 0$) die Form;

$$(75)\quad \lambda_2\eta^2 + 2a_{13}\xi + 2a_{23}\eta + a_{33} = 0.$$

Je nachdem dann mit (68):

$$(76)\quad J_{33} = 0,\quad J\,J'_{33} \neq 0$$

ein einziger unendlich ferner Mittelpunkt oder mit:

$$(77)\quad J_{33} = 0,\quad J = 0,\quad J'_{33} = 0,\quad J' \neq 0$$

eine unendlich ferne Mittelpunktsachse vorliegt, wird:

$$(78)\quad \lambda_2 = J'_{33} \neq 0$$

oder

$$(79)\quad \lambda_2 = 0.$$

5. Beziehung der Hauptachsenrichtungen zu dem unendlich fernen Mittelpunkt.

Aus den homogen geschriebenen Gleichungen (43), also aus:

$$(80)\quad \begin{cases} a'_{11}x'_0 + a'_{12}y'_0 + a'_{13}t'_0 = 0, \\ a'_{21}x'_0 + a'_{22}y'_0 + a'_{23}t'_0 = 0 \end{cases}$$

ergibt sich zunächst:

$$x'_0 : y'_0 : t'_0 = A'_{13} : A'_{23} : A'_{33}$$

und daher für $A'_{33} = 0$:

$$(80\,a) \quad x'_0 : y'_0 = A'_{13} : A'_{23}\,, \quad t'_0 = 0\,,$$

aber auch aus (80) direkt, wenn man erst $t'_0 = 0$ setzt:

$$(81) \quad x'_0 : y'_0 = -a'_{12} : a'_{11} = a'_{22} : -a'_{12}\,.$$

Man hat in (81) die Koordinaten des unendlich fernen Mittelpunktes.

Legt man nun die x-Achse des rechtwinkligen Systems durch diesen hindurch, so ist nach § 1, 3a:

$$(81\,a) \quad A_1 : A_2 = A'_{13} : A'_{23} = -a'_{12} : a_{11} = a'_{22} : -a'_{12}\,.$$

Da aber für $A'_{33} = 0$ ($J_{33} = 0$) nach (41) $\lambda_1 = a_{11} = 0$ ist, so folgt auch aus (32):

$$A_1 : A_2 = -a'_{12} : a'_{11} = a'_{22} : -a'_{12}\,,$$

d. h. die im Hauptachsenproblem durch $A_1 : A_2$ bestimmte Hauptachse x geht durch den unendlich fernen Mittelpunkt.

Wir setzen mit einem Proportionalitätsfaktor:

$$(82) \quad \tau A_1 = A'_{13}\,, \quad \tau A_2 = A'_{23}\,.$$

Daraus folgt:

$$\tau^2 (A^2_1 + A^2_2 + 2 A_1 A_2 \gamma) = A'^2_{13} + A'^2_{23} + 2 A'_{13} A'_{23} \gamma\,.$$

Mit Rücksicht auf (17) wird alsdann:

$$(83) \quad \tau = \frac{1}{S} \sqrt{A'^2_{13} + A'^2_{23} + 2 A'_{13} A'_{23} \gamma}$$

oder nach (66):

$$(83\,a) \quad \tau = S \sqrt{-J J'_{33}}\,.$$

6. Verschwinden eines linearen Gliedes.

Die Koefficienten a_{13} und a_{23} können nicht beide gleich 0 sein, es kann jedoch der Koordinatenanfangspunkt so gewählt werden, daß einer von ihnen, a_{23}, und das konstante Glied a_{33} verschwindet, also:

$$(84)\quad Sa_{23} = g_1(x'_0\, y'_0)\, B_1 + g_2(x'_0\, y'_0)\, B_2 = 0,$$

$$(85)\quad a_{33} = g(x'_0\, y'_0) = 0.$$

7. Der Scheitelpunkt der Kurven mit einem unendlich fernen Mittelpunkt.

Aus der Gleichung (84) folgt mit einem Proportionalitätsfaktor ρ:

$$(86)\quad g^0_1 + \rho B_2 = 0,\quad g^0_2 - \rho B_1 = 0.$$

Der Scheitelpunkt der Kurve ist durch die drei Gleichungen (85), (86) unter Elimination von ρ bestimmt.

Zur Bestimmung von $S.a_{13}$ setzen wir die Werte von g^0_1, g^0_2 aus (86) in:

$$Sa_{13} = g^0_1 A_1 + g^0_2 A_2$$

ein und erhalten mit Rücksicht auf (16):

$$Sa_{13} = -\rho(A_1 B_2 - A_2 B_1) = -\rho S.$$

Folglich ist:

$$(87)\quad a_{13} = -\rho.$$

8. Die Gleichungen der Hauptachse.

Die Gleichungen (86) lauten ausführlich geschrieben:

$$(88)\quad \begin{cases} a'_{11} x'_0 + a'_{12} y'_0 + a'_{13} + \rho . B_2 = 0, \\ a'_{21} x'_0 + a'_{22} y'_0 + a'_{23} - \rho . B_1 = 0. \end{cases}$$

Da nun infolge von (63) die Gleichungen gelten:

$$(89)\quad a'_{11} A'_{13} + a'_{21} A'_{23} = 0,\quad a'_{12} A'_{13} + a'_{22} A'_{23} = 0,$$
$$a'_{13} A'_{13} + a'_{23} A'_{23} = A',$$

so folgt durch Multiplikation der Gleichungen (88) mit A'_{13} und A'_{23} und Addition:

$$\rho\,(B_2\,A'_{13} - B_1\,A'_{23}) + A' = 0$$

oder infolge von (82):

$$\rho\,.\,\tau\,.\,(B_2\,A_1 - B_1\,A_2) + A' = 0$$

oder mit Rücksicht auf (16):

$$\rho\,.\,\tau\,.\,S + A' = 0\,.$$

Mit Rücksicht auf (83) folgt alsdann:

$$(90)\quad \rho = -\frac{A'}{S\tau} = -\frac{SJ}{\tau} = -\frac{J}{\sqrt{-JJ'_{33}}} = \frac{\sqrt{-JJ'_{33}}}{J'_{33}}$$

Wir berechnen jetzt die Werte von $\rho\,B_1$ und $\rho\,B_2$. Da nach (14) $A^2_1 + B^2_1 = 1$, $A^2_2 + B^2_2 = 1$, so ist, wenn wir die positive Wurzel nehmen:

$$B_2 = \sqrt{1 - A^2_2}$$

oder infolge von (82), (83) und (83a):

$$= \frac{1}{\tau}\sqrt{\tau^2 - A'^2_{23}} = \frac{1}{S\sqrt{-JJ'_{33}}}\sqrt{\frac{A'^2_{13} + A'^2_{23} + 2A'_{13}A'_{23}\gamma - A'^2_{23}S^2}{S^2}}$$

oder mit (31), wenn wir wiederum die positive Wurzel nehmen:

$$B_2 = \frac{A'_{13} + A'_{23}\gamma}{S^2\sqrt{-JJ'_{33}}}\,.$$

Folglich ist mit Berücksichtigung des Wertes (90) von ρ:

$$(91)\quad \rho\,.\,B_2 = \frac{A'_{13} + A'_{23}\gamma}{S^2 J'_{33}}\,.$$

Entsprechend folgt für $\rho\,B_1$, das aber das entgegengesetzte Vorzeichen von $\rho\,B_2$ haben muß, damit die zweite der Gleichungen (17) befriedigt wird:

$$(92)\quad \rho\,B_1 = -\frac{A'_{13}\gamma + A'_{23}}{S^2 J'_{33}}\,.$$

Indem wir diese Werte in (88) einsetzen, so ergibt sich, daß der Scheitelpunkt mit Unterdrückung des Index 0 den Gleichungen genügen muß:

$$(93)\quad \begin{cases} X_1 = a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13} + \dfrac{A'_{13} + A'_{23}\gamma}{S^2 J'_{33}}, \\ X_2 = a'_{21}x' + a'_{22}y' + a'_{23} + \dfrac{A'_{13}\gamma + A'_{23}}{S^2 \cdot J'_{33}}, \end{cases}$$

die mit $\gamma = 0$, $S = 1$ in II § 25, (19) übergehen.

Da nun nach (89):

$$A'_{13}X_1 + A'_{23}X_2 = 0,$$

und A'_{13} und A'_{23} nicht beide verschwinden, so stellen die Gleichungen (93) dieselbe Gerade dar. Diese Gerade ist die Hauptachse der Kurve.

9. Lineare Gleichungen für den Scheitelpunkt.

Die Hauptachse schneidet die Kurve nur in einem endlichen Punkt, dem Scheitelpunkt. Die Gleichung (85) wird daher infolge von (86) linear:

$$g^0 = g^0_1 x'_0 + g^0_2 y'_0 + g^0_3 = -\rho(B_2 x'_0 - B_1 y'_0) + g^0_3 = 0,$$

wo noch die Werte (91) und (92) einzusetzen sind.

Die Koordinaten des Scheitelpunktes bestimmen sich also aus den drei Gleichungen:

$$(94)\quad \begin{cases} a'_{11}x'_0 + a'_{12}y'_0 + a'_{13} + \dfrac{A'_{13} + A'_{23}\gamma}{S^2 J'_{33}} = 0, \\ a'_{21}x'_0 + a'_{22}y'_0 + a'_{23} + \dfrac{A'_{23} + A'_{13}\gamma}{S^2 J'_{33}} = 0, \\ \left(a'_{31} - \dfrac{A'_{13} + A'_{23}\gamma}{S^2 J'_{33}}\right)x'_0 + \left(a'_{32} - \dfrac{A'_{23} + A'_{13}\gamma}{S^2 J'_{33}}\right)y'_0 + a'_{33} = \end{cases}$$

von denen die beiden ersten für eine zählen.

Die drei Gleichungen (94) sind linear und homogen in $x'_0, y'_0, 1, \frac{1}{S^2 J'_{33}}$. 10. Die Koordinaten des Scheitelpunktes.

Folglich ist:

$$(95) \quad x'_0 : y'_0 : 1 : \frac{1}{S^2 J'_{33}} = X' : -Y' : Q' : -R'.$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\text{5)} \quad = \begin{vmatrix} a'_{12} & a'_{13} & A'_{13} + A'_{23}\gamma \\ a'_{22} & a'_{23} & A'_{23} + A'_{13}\gamma \\ a'_{32} - \frac{A'_{23} + A'_{13}\gamma}{S^2 J'_{33}} a'_{33} & & 0 \end{vmatrix}, \quad Y' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{13} & A'_{13} + A'_{23}\gamma \\ a'_{21} & a'_{23} & A'_{23} + A'_{13}\gamma \\ a'_{31} - \frac{A'_{13} + A'_{23}\gamma}{S^2 J'_{33}} a'_{33} & & 0 \end{vmatrix},$$

$$Q' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & A'_{13} + A'_{23}\gamma \\ a'_{21} & a'_{22} & A'_{23} + A'_{13}\gamma \\ a'_{31} - \frac{A'_{13} + A'_{23}\gamma}{S^2 J'_{33}} a'_{32} & - \frac{A'_{23} + A'_{13}\gamma}{S^2 J'_{33}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & A'_{13} + A'_{23}\gamma \\ a'_{21} & a'_{22} & A'_{23} + A'_{13}\gamma \\ a'_{31} & a'_{32} & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{S^2 J'_{33}} \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & A'_{13} + A'_{23}\gamma \\ a'_{21} & a'_{22} & A'_{23} + A'_{13}\gamma \\ A'_{13} + A'_{23}\gamma & A'_{23} + A'_{13}\gamma & 0 \end{vmatrix}$$

R schließlich ist die Unterdeterminante aus den drei letzten Kolonnen der Koefficienten in (94). Die Koordinaten des Scheitelpunktes haben die Werte:

$$(97) \quad x'_0 = \frac{X'}{Q'}, \quad y'_0 = \frac{Y'}{Q'}.$$

Die Gleichung (75) wird mit (78), (84), (85), (87), (90): 11. Die Hauptachsenscheitelgleichung.

$$(98) \quad J'_{33}\,\eta^2 - \frac{2\sqrt{-JJ'_{33}}}{J'_{33}}\,\xi = 0.$$

Die Kurve ist eine Parabel. Die Richtung der Hauptachse ξ ist durch (82) und (83) bestimmt, und die Parabel ist nach dieser Richtung hin offen.

12. Kurven mit unendlich ferner Mittelpunktsachse.

Im Falle (65) lautet die Gleichung der Kurve:

$$(99)\quad g(x'\,y') = 2a'_{13}\,x' + 2a'_{23}\,y' + a'_{33} = 0\,;$$
$$f(x'\,y'\,t') = (2a'_{13}\,x' + 2a'_{23}\,y' + a'_{33}\,t')\,t' = 0\,.$$

Die Kurve besteht aus einer endlichen und einer unendlich fernen Graden.

Wenn man die endliche Gerade als ξ-Achse wählt, mithin:

$$(100)\quad \eta_1' = \frac{a'_{13}\,x' + a'_{23}\,y' + \frac{1}{2}\,a'_{33}\,t'}{\sqrt{-J'}}$$

setzt, so geht die Gleichung der Kurve über in:

$$(100a)\quad g(x'\,y') = 2\sqrt{-J'}\,.\,\eta_1' = 0\,,$$

worin nach (73):

$$J' = -\frac{a'^2_{13} + a'^2_{23} - 2\,a'_{13}\,a'_{23}\,\gamma}{S^2}\,.$$

§ 5. Unterscheidung nach dem Vorzeichen der Koefficienten.

1. Kanonische Gleichungen.

Die auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem bezogene Gleichung der Kurve:

$$(101)\quad G(x'\,y') = a'_{11}\,x'^2 + 2a'_{12}\,x'\,y' + a'_{22}\,y'^2 + 2a'_{13}\,x' + 2a'_{23}\,y' + a'_{33} = 0$$

kann durch Transformation auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem nach den vorstehenden Entwickelungen auf eine kanonische Form gebracht werden.

In dieser Gleichungsform ordnen wir die verschiedenen Kurven zweiter Ordnung nach ihrem eigenen Range, d. h. der Anzahl ihrer Doppelelemente einerseits und dem Range des Schnittpunktepaares mit der

unendlich fernen Geraden andrerseits in die folgende Tabelle ein:

102)	I $A' \neq 0$ Eigentl. Kegelschnitte	II $A' = 0, D' \neq 0$. Getrennte Linienp.	III $A' = 0, D' = 0$ Doppellinien
1. $J_{33} \neq 0$ Getrennte Punktep.	$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \frac{J}{J_{33}} = 0$	$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0$	
2. $J_{33} = 0, J'_{33} \neq 0$. Doppelpunkt.	$\lambda_2 \eta^2 - \frac{2\sqrt{-J J'_{33}}}{J'_{33}} \xi = 0$	$\lambda_2 \eta^2 + \frac{J'}{J'_{33}} = 0$	$\lambda_2 \eta^2 = 0$
3. $J_{33} = 0, J'_{33} = 0$ Unbestimmt.		$2\sqrt{-J'}\,\eta \cdot \tau = 0$	$\tau^2 = 0$

Hierin sind λ_1 λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - J'_{33}\,\lambda + J_{33} = 0$$

und bedeuten:

$$J = \frac{A'}{S^2}, \quad J_{33} = \frac{A'_{33}}{S^2},$$

$$J'_{33} = \frac{a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\,\gamma}{S^2}, \quad J' = \frac{A'_{11} + A'_{22} + 2A'_{12}\,\gamma}{S^2}$$

(vergl. II § 22, (16), (22)),

$$(103)\quad D' = A'_{11} + A'_{22} + A'_{33}.$$

Da überdies für $J_{33} = 0$:

$$S^4 J J'_{33} = -(A'^2_{13} + A'^2_{23} + 2A'_{13} A'_{23}\,\gamma),$$

und da für $J_{33} = 0$, $a'_{11} = 0$, $a'_{12} = 0$, $a'_{22} = 0$:

$$S^2 J' = -(a'^2_{13} + a'^2_{23} - 2a'_{13} a'_{23}\,\gamma),$$

so ist in II, 3:

$$J' < 0.$$

Die Bedingungen II, III:

$$A' = 0\,,\ D' \neq 0 \text{ und } A' = 0\,,\ D' = 0$$

bedeuten, daß entweder:

nicht alle A_{kl} gleich 0 oder alle A_{kl} gleich 0 (II § 19[2]).

2. Die Arten der eigentlichen Kurven.

Wir setzen:

$$(104)\quad \alpha = \frac{J}{J_{33}\,\lambda_1}\,,\quad \beta = \frac{J}{J_{33}\,\lambda_2}\,.$$

Alsdann geht die Gleichung I, 2 über in:

$$(105)\quad \frac{\xi^2}{\alpha} + \frac{\eta^2}{\beta} + 1 = 0\,.$$

Für die Werte von α und β gilt:

$$\alpha + \beta = \frac{J}{J_{33}}\,\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1\,\lambda_2} = \frac{J\,.\,J'_{33}}{J^2_{33}}\,,$$

$$\alpha\,.\,\beta = \frac{J^2}{J^2_{33}\,\lambda_1\,\lambda_2} = \frac{J^2}{J^2_{33}\,.\,J_{33}}\,.$$

Für die Vorzeichen von α und β folgt dann:

$$(106)\quad \begin{cases} \text{wenn}\ \ J_{33} > 0\,,\ JJ'_{33} > 0 : + + \\ \text{„}\ \ J_{33} > 0\,,\ JJ'_{33} < 0 : - - \\ \text{„}\ \ J_{33} < 0\,, \qquad\qquad : - + \end{cases}$$

Nun ist nach II, S. 950, Note 95:

$$(a'_{11} + a'_{22})\,.\,(a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\,\gamma)$$

bei positiven A'_{33} oder J_{33} auch positiv. Daher können wir mit der Abkürzung:

$$(107)\quad D'_{33} = a'_{11} + a'_{22}$$

die Bedingungen (106) auch schreiben:

$$(108)\quad \begin{cases} \text{wenn}\ \ A'_{33} > 0\,,\ A'\,D'_{33} > 0 : + + \\ \text{„}\ \ A'_{33} > 0\,,\ A'\,D'_{33} < 0 : - - \\ \text{„}\ \ A'_{33} < 0\,, \qquad\qquad : - + \end{cases}$$

Die Bedingungen (108) stimmen mit den Bedingungen im rechtwinkligen Koordinatensystem überein (vergl. II § 26, (7)).

Die Bedingungen der zweiten Zeile lassen sich nach II, § 26 (8) durch folgende ersetzen:

$$A'_{33} > 0\,;\ A'\,D'_{33} \text{ und } A'_{33} \text{ nicht beide } > 0\,,$$

denn der Fall $A'\,D'_{33} \quad 0$ ist für $A' \neq 0$, $A'_{33} \ > 0$ ausgeschlossen, da nach II § 23 (25):

$$A'^{2}_{33} = a'^{2}_{11} + 2a'^{2}_{12} + a'^{2}_{22} + 2A'_{33}\,.$$

Für die Kurve 1, 2:

$$(109)\quad \lambda_2\,\eta_1^2 - \frac{2\,\lambda - JJ'_{33}}{J'_{33}}\,\xi \quad 0\,,\ p \qquad \frac{\sqrt{-J\,J'_{33}}}{J'^{2}_{33}}$$

ist $JJ'_{33} < 0$. Da nun nach § 3, [5]:

$$a'_{11} + a'_{22} \text{ und } a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\,\gamma$$

für $A'_{33} = 0$ oder $J_{33} = 0$ dasselbe Vorzeichen haben, so können wir die Bedingung $JJ'_{33} < 0$ für die Kurve (109) auch ersetzen durch $A'\,.\,D'_{33} < 0$.

Wir stellen die Arten der eigentlichen Kurven in der nachstehenden Tabelle zusammen. Statt der Koefficienten α und β führen wir α^2 und β^2 mit den entsprechenden Vorzeichen ein.

10)		$A' \neq 0$ Eigentliche Kegelschnitte	
		$A'\,D'_{33} > 0\,,\ A'_{33} > 0$	$A'\,D'_{33}\,,\ A'_{33}$ nicht beide > 0
$_{33} \neq 0$	$A'_{33} > 0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta_1^2}{\beta^2} + 1 = 0$ Imag. Ellipse	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta_1^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Ellipse
	$A'_{33} < 0$		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta_1^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Hyperbel
$A'_{33} = 0\,,\ D'_{33} \neq 0$			$\eta^2 - 2\,p\,\xi = 0$ Parabel

3. Die Arten der Linienpaare.

Das Linienpaar II, 1:

$$(111)\quad \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta_1^2 = 0$$

ist nach (39) imaginär oder reell, je nachdem

$$J_{33} > 0 \ (A'_{33} > 0) \text{ oder } J_{33} < 0 \ (A'_{33} < 0).$$

Daher erhalten wir die Tabelle:

(112)

		$A' = 0$, $D' \neq 0$	
		$A'_{33} > 0$	$A'_{33} < 0$
$A'_{33} \neq 0$	$A'_{33} > 0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta_1^2}{\beta^2} = 0$ Imag. Linienp.	
	$A'_{33} < 0$		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta_1^2}{\beta^2} = 0$ Reelles Linienp.

Das Parallellellinienpaar II, 2:

$$(113)\quad \eta_1^2 + \frac{J'}{J'^2_{33}} = 0$$

ist imaginär oder reell, je nachdem:

$$J' > 0 \text{ oder } J' < 0.$$

Nun ist $a'_{33} A' = A'_{11} A'_{22} - A'^2_{12} = 0$, folglich:

$$| A'_{11} + A'_{22} | > | 2A'_{12} \gamma |.$$

Da ferner $J_{33} = 0$ oder $A'_{33} = 0$, so können die Bedingungen für das Parallellinienpaar (113) mit der Abkürzung (103) auch geschrieben werden:

$$D' > 0 \text{ oder } D' < 0.$$

Für das Paar II, 3:

$$(114)\quad 2\sqrt{-J'}\,\eta . \tau = 0$$

ist $J' < 0$ oder $D' < 0$.

Wir stellen diese Bedingungen ebenfalls in einer Tabelle zusammen:

(115)	$D' > 0$	$D' < 0$
$A'_{33} = 0, D'_{33} \neq 0$	$\frac{\eta_1^2}{\beta^2} + 1 = 0$ Imag. Parallellinienp.	$\frac{\eta_1^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Reell. Parallellinienp.
$A'_{33} = 0, D'_{33} = 0$		$\eta \cdot \tau = 0$ Endl. u. ∞ f. Linie.

Die Bedingungen für die Kurven 2. Ordnung im schiefwinkligen Koordinatensystem stimmen mit den Bedingungen im rechtwinkligen Koordinatensystem überein (vergl. II. § 26, (9) (11) (15) (16)).

Die Tabellen (110), (112), (115)) lassen sich in eine einzige zusammenfassen (II § 26 (19)).

1. Eigentliche Kegelschnitte ($A \neq 0$).

4. Vergleich der Plückerschen Kriterien mit den gewonnenen Resultaten.

Den Bedingungen bei Plücker für die imaginäre und reelle Ellipse $A_{33} > 0$, $a_{22} . A \gtrless 0$ kann man leicht unsre Form geben.

Denn da $A_{33} = a_{11} a_{22} - a^2_{12} > 0$, so müssen a_{11} und a_{22} das gleiche Vorzeichen haben. Für $a_{22} . A \gtrless 0$ kann also die Bedingung eintreten $A'_{33} . A \gtrless 0$, worin $A'_{33} = a_{11} + a_{22}$.

Für die Hyperbel ist $A_{33} < 0$, der Wert von $a_{22} . A$ ist beliebig, ebenso wie der Wert von $A'_{33} . A$. Es kann also $A'_{33} A$ für $a_{22} . A$ gesetzt werden.

Die Bedingungen für die Parabel sind $A_{33} = 0$, $a_{22} \cdot A < 0$. Da $A_{33} = a_{11} a_{22} - a^2_{12} = 0$, so haben a_{11} und a_{22} dasselbe Vorzeichen, so daß die Bedingung $a_{22} \cdot A < 0$ durch $A'_{33} A < 0$ ersetzt werden kann.

2. Linienpaare ($A = 0$).

Die Bedingungen für das imaginäre und reelle Linienpaar $A = 0$, $A_{33} \gtrless 0$ bleiben unverändert.

3. Parallellinienpaar ($A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$, $A_{33} = 0$).

Für das Verschwinden von A_{13}, A_{23}, A_{33} ist notwendig und hinreichend die Bedingung $A_{33} = 0$, $A = 0$, denn für $A_{33} = 0$ ist $(a_{11} + a_{22}) A = A'_{33} A = -(A^2_{13} + A^2_{23})$.

Es sei:

$$A' = A_{11} + A_{22} + A_{33};$$

da aber $A_{33} = 0$, so folgt:

$$A' = A_{11} + A_{22}.$$

Weil nun $a_{33} \cdot A = A_{11} \cdot A_{22} - A^2_{12} = 0$, so müssen A_{11} und A_{22} dasselbe Vorzeichen haben, so daß also die Bedingungen $A_{22} \gtrless 0$ in der Plückerschen Tabelle durch $A' \gtrless 0$ ersetzt werden können.

4. Doppellinie ($A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$, $A_{33} = 0$, $A_{22} = 0$).

Da $a_{33} A = A_{11} A_{22} - A^2_{12} = 0$, so ist mit $A_{22} = 0$ auch $A_{12} = 0$. Da weiter $A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} = 0$ und $A_{12} = 0$, $A_{13} = 0$, so folgt unter der Annahme $a_{11} \neq 0$: $A_{11} = 0$. Mithin ist auch $A' = 0$. Umgekehrt, wenn $A = 0$, $A' = 0$, folgt aus II § 19 (7), daß sämtliche $A_{kl} = 0$.

Nach den vorstehenden Entwickelungen können wir also die Bedingungen bei Plücker in die Bedingungen unsrer Tabellen, wenn wir von den Akzenten absehen, umformen.

Es fehlen bei Plücker zwei Fälle:

1. Die endliche und die unendlich ferne Gerade.
2. Die unendlich ferne Doppelgerade.

5. Unterarten der Kurve zweiter Ordnung.

Die Gleichung (33) $\Delta(\lambda)$ hat eine Doppelwurzel, wenn

$$a'_{11}\gamma = a'_{22}\gamma - a'_{12}.$$

Dann wird $A'_{33} = a'^2_{11} S^2$, $a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\gamma - 2a'_{11} S^2$,

$$A = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{11}\gamma & a'_{13} \\ a'_{11}\gamma & a'_{11} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = a'^2_{11} a'_{33} S^2 + 2a'_{11} a'_{13} a'_{23}\gamma - a'_{11}(a'^2_{13} + a'^2_{23}).$$

Die Kurve ist ein imaginärer oder reeller Kreis oder ein Kreisstrahlenpaar, je nachdem:

$$a'^2_{11} a'_{33} S^2 + 2a'_{11} a'_{13} a'_{23}\gamma - a'_{11}(a'^2_{13} + a'^2_{23}) > 0, < 0 \text{ oder } = 0,$$

oder die Kurve enthält die unendlich ferne Gerade ganz, wenn:

$$a'_{11}\gamma = a'_{22}\gamma = a'_{12} - 0.$$

Die Gleichung $\Delta(\lambda)$ liefert gleiche und entgegengesetzte Werte, wenn:

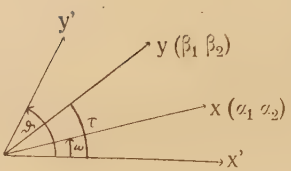
$$a'_{11} + a'_{22} - 2a'_{12}\gamma = 0.$$

Die Kurve ist dann eine gleichseitige Hyperbel oder ein rechtwinkliges Linienpaar, je nachdem:

$$A' \neq 0 \text{ oder } A' = 0.$$

§ 6. Allgemeine Transformation der Kurven zweiter Klasse von schiefwinkligen auf rechtwinklige Koordinaten.

1. Richtungskosinus im schiefwinkligen System.



Sind $\alpha_1\ \alpha_2\ (\omega)$ und $\beta_1\ \beta_2\ (\tau)$ zwei beliebige Richtungen im schiefwinkligen System $O\,x'y'(\vartheta)$, so ist für die Richtungskosinus $\alpha_1\ \alpha_2$ und $\beta_1\ \beta_2$:

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \cos\omega, & \alpha_2 = \cos(\vartheta - \omega) = \cos\vartheta\cos\omega + \sin\vartheta\,.\sin\omega, \\ \beta_1 = \cos\tau, & \beta_2 = \cos(\vartheta - \tau) = \cos\vartheta\cos\tau + \sin\vartheta\,.\sin\tau. \end{cases}$$

Daraus folgt mit den Abkürzungen $\sin\vartheta = S$, $\cos\vartheta = \gamma$:

$$\cos\omega = \alpha_1,\ \sin\omega = \frac{\alpha_2 - \alpha_1\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{\alpha_2 - \gamma\,\alpha_1}{S},$$

$$\cos\tau = \beta_1,\ \sin\tau = \frac{\beta_2 - \beta_1\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{\beta_2 - \gamma\,\beta_1}{S}.$$

Mithin wird:

$$\cos(\tau - \omega) = \cos\tau\,.\cos\omega + \sin\tau\,.\sin\omega$$

$$= \alpha_1\beta_1 + \frac{(\alpha_2 - \gamma\,\alpha_1)\,(\beta_2 - \gamma\,\beta_1)}{S^2}$$

$$= \frac{\alpha_1\beta_1\sin^2\vartheta + \alpha_2\beta_2 - \gamma\,(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \alpha_1\beta_1\cos^2\vartheta}{S^2}.$$

Folglich ist:

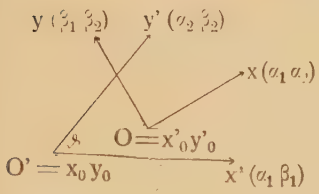
$$(2)\quad S^2\cos(\tau - \omega) = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) - \gamma\,(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1).$$

Daher sind zwei durch ihre Richtungskosinus $\alpha_1\ \alpha_2$ und $\beta_1\ \beta_2$ im schiefwinkligen

System gegebene Richtungen senkrecht, wenn:

$$(3)\quad (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) - \gamma (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) = 0 .$$

Für den vorliegenden Fall haben wir außerdem noch die Relationen § 1, (8), (9), (10), (11).



2. Transformation der Koordinaten.

O x y sei ein rechtwinkliges, O' x' y' ein schiefwinkliges System. $x_0 y_0$ seien die Koordinaten von O', $\alpha_1 \beta_1$ und $\alpha_2 \beta_2$ die Richtungskosinus der Achsen x' und y' in bezug auf das System O x y, $x'_0 y'_0$ die Koordinaten von O, $\alpha_1 \alpha_2$ und $\beta_1 \beta_2$ die Richtungskosinus der Achsen x und y in bezug auf das System O' x' y'. Dann lauten die Transformationsformeln beim Übergang vom rechtwinkligen System O x y zum schiefwinkligen System O' x' y' und umgekehrt (II. § 15, (10), (11)):

$$(4)\quad \begin{cases} u' = \alpha_1 u + \beta_1 v , \\ v' = \alpha_2 u + \beta_2 v , \\ s' = x_0 u + y_0 v + s ; \end{cases} \qquad (5)\quad \begin{cases} S u = A_1 u' + A_2 v', \\ S v = B_1 u' + B_2 v', \\ S s = S x'_0 u' + S y'_0 v' + S s'. \end{cases}$$

Dabei haben $S x'_0$, $S y'_0$; x_0, y_0 die Werte § 1, (20), (21) und S den Wert § 1, (10).

3. Allgemeine Transformation der Kurve 2. Klasse.

Die Gleichung der Kurve zweiter Klasse laute im schiefwinkligen System u', v', s':

$$(6)\quad G(u' v' s') = b'_{11} u'^2 + 2 b'_{12} u' v' + b'_{22} v'^2 + 2 b'_{13} u' s' + 2 b'_{23} v' s' + b'_{33} s'^2 = 0 .$$

Die halben partiellen Differentialquotienten von G bezeichnen wir mit:

$$(7)\quad \begin{cases} G_1(u'\,v'\,s') = b_{11}\,u' + b'_{12}\,v' + b'_{13}\,s', \\ G_2(u'\,v'\,s') = b'_{21}\,u' + b'_{22}\,v' + b'_{23}\,s', \\ G_3(u'\,v'\,s') = b'_{31}\,u' + b'_{32}\,v' + b'_{33}\,s'. \end{cases}$$

Indem wir nun mittels der Formeln (4) zum rechtwinkligen System übergehen, wird:

$$(8)\quad G(u'\,v'\,s') = S^2 F(u\,v\,s)$$

$$= S^2(b_{11}\,u^2 + 2\,b_{12}\,u\,v + b_{22}\,v^2 + 2\,b_{13}\,u\,s + 2\,b_{23}\,v\,s + b_{33}\,s^2) = G$$

wenn wir in Übereinstimmung mit II. § 15 (17) und § 31 (2) den unwesentlichen Faktor S^2 hinzufügen, was ja nur eine Bezeichnungsweise der b_{kl} ist. Dabei wird durch Ausführung der Substitution:

$$(9)\quad S^2 b_{11} = G(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0) = G_1(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0)\,\alpha_1 + G_2(\alpha_1\,\alpha_2)\,\alpha_2 + G_3(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0)\,x_0$$

$$S^2 b_{22} = G(\beta_1\,\beta_2\,y_0) = G_1(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\beta_1 + G_2(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\beta_2 + G_3(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,y_0$$

$$S^2 b_{12} = G_1(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0)\,\beta_1 + G_2(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0)\,\beta_2 + G_3(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0)\,y_0$$

$$= G_1(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\alpha_1 + G_2(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\alpha_2 + G_3(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,x_0,$$

$$S^2 b_{13} = G_3(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0),$$

$$S^2 b_{23} = G_3(\beta_1\,\beta_2\,y_0),$$

$$S^2 b_{33} = b'_{33}.$$

4. Der Mittelpunkt und die Mittelpunktsgleichung.

Ist der neue Koordinatenanfangspunkt der Mittelpunkt der Kurve 2. Klasse, so müssen die linearen Glieder in der Gleichung (8) verschwinden, also:

$$(10)\quad \begin{cases} S^2 b_{13} = G_3(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0) = b'_{13}\,\alpha_1 + b'_{23}\,\alpha_2 + b'_{33}\,x_0 = 0, \\ S^2 b_{23} = G_3(\beta_1\,\beta_2\,y_0) = b'_{13}\,\beta_1 + b'_{23}\,\beta_2 + b'_{33}\,y_0 = 0, \end{cases}$$

oder wenn wir für x_0, y_0 die Werte § 1, (21) einsetzen:

$$(11)\quad \begin{cases} b'_{13}\,\alpha_1 + b'_{23}\,\alpha_2 = b'_{33}(\alpha_1\,x'_0 + \alpha_2\,y'_0), \\ b'_{13}\,\beta_1 + b'_{23}\,\beta_2 = b'_{33}(\beta_1\,x'_0 + \beta_2\,y'_0), \end{cases}$$

oder:

$$(12)\quad \begin{cases} (b'_{13} - b'_{33}\, x'_0)\,\alpha_1 + (b'_{23} - b'_{33}\, y'_0)\,\alpha_2 = 0\,, \\ (b'_{13} - b'_{33}\, x'_0)\,\beta_1 + (b'_{23} - b'_{33}\, y'_0)\,\beta_2 = 0\,. \end{cases}$$

Da $\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1 = S \neq 0$, so folgt aus (12):

$$b'_{13} - b'_{33}\, x'_0 = 0\,, \quad b'_{23} - b'_{33}\, y'_0 = 0$$

oder:

$$(13)\quad x'_0 = \frac{b'_{13}}{b'_{33}}\,,\ y'_0 = \frac{b'_{23}}{b'_{33}}\,.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes der gegebenen Kurve zweiter Klasse (6) haben die Werte (13).

Unter der Voraussetzung:

$$(14)\quad b'_{33} \neq 0$$

ist also ein bestimmter endlicher Mittelpunkt vorhanden. Führt man diesen dann als Koordinatenanfangspunkt ein, so lautet die Gleichung der Kurve:

$$(15)\quad G(u'\,v'\,s') = S^2\,F(u\,v\,s)$$
$$= S^2\,(b_{11}\,u^2 + 2\,b_{12}\,u\,v + b_{22}\,v^2 + b_{33}\,s^2) = 0\,.$$

§ 7. Die Mittelpunktskurven.

1. Die quadratische Gleichung des Hauptachsenproblems.

Infolge der für die Mittelpunktsgleichung vorausgesetzten Formeln (10) wird mit Rücksicht auf die Werte (9) der Koefficienten:

$$(16)\quad \begin{cases} S^2\,b_{11} = G_1\,(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0)\,\alpha_1 + G_2\,(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0)\,\alpha_2\,, \\ S^2\,b_{22} = G_1\,(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\beta_1 + G_2\,(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\beta_2\,, \\ S^2\,b_{12} = G_1\,(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0)\,\beta_1 + G_2\,(\alpha_1\,\alpha_2\,x_0)\,\beta_2 \\ \qquad\qquad = G_1\,(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\alpha_1 + G_2\,(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\alpha_2\,. \end{cases}$$

Wir stellen diese Gleichungen in folgender Weise zusammen:

$$(17)\quad \begin{cases} G_1(\alpha_1\alpha_2x_0)\alpha_1+G_2(\alpha_1\alpha_2x_0)\alpha_2=S^2b_{11}, \\ G_2(\alpha_1\alpha_2x_0)\beta_1+G_2(\alpha_1\alpha_2x_0)\beta_2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} G_1(\beta_1\beta_2y_0)\alpha_1+G_2(\beta_1\beta_2y_0)\alpha_2=0, \\ G_1(\beta_1\beta_2y_0)\beta_1+G_2(\beta_1\beta_2y_0)\beta_2=S^2b_{22} \end{cases}$$

Multipliziert man mit $\alpha_1\ \beta_1$ oder $\alpha_2\ \beta_2$ und addiert, so wird mit § 1, (8), (9):

$$\begin{cases} G_1(\alpha_1\alpha_2x_0)+G_2(\alpha_1\alpha_2x_0)\gamma=S^2\alpha_1b_{11}, \\ G_1(\alpha_1\alpha_2x_0)\gamma+G_2(\alpha_1\alpha_2x_0)=S^2\alpha_2b_{11}; \end{cases} \quad \begin{cases} G_1(\beta_1\beta_2y_0)+G_2(\beta_1\beta_2y_0)\gamma=S^2\beta_1b_{22} \\ G_1(\beta_1\beta_2y_0)\gamma+G_2(\beta_1\beta_2y_0)=S^2\beta_2b_{22} \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden mit 1, $-\gamma$ oder $-\gamma$, 1 multipliziert und addiert. Alsdann wird mit § 1, (10):

$$(18)\quad \begin{cases} G_1(\alpha_1\alpha_2x_0)=b_{11}(\alpha_1-\alpha_2\gamma), \\ G_2(\alpha_1\alpha_2x_0)=b_{11}(-\alpha_1\gamma+\alpha_2), \\ G_3(\alpha_1\alpha_2x_0)=0. \end{cases} \quad \begin{cases} G_1(\beta_1\beta_2y_0)=b_{22}(\beta_1-\beta_2\gamma), \\ G_2(\beta_1\beta_2y_0)=b_{22}(-\beta_1\gamma+\beta_2), \\ G_3(\beta_1\beta_2y_0)=0. \end{cases}$$

und dazu

Ausführlich geschrieben lauten diese Gleichungen:

$$(18a)\quad \begin{cases} (b'_{11}-b_{11})\alpha_1+(b'_{12}+b_{11}\gamma)\alpha_2+b'_{13}x_0=0, \\ (b'_{21}+b_{11}\gamma)\alpha_1+(b'_{22}-b_{11})\alpha_2+b'_{23}x_0=0, \\ b'_{31}\alpha_1+b'_{32}\alpha_2+b'_{33}x_0=0; \end{cases} \quad \begin{cases} (b'_{11}-b_{22})\beta_1+(b'_{12}+b_{22}\gamma)\beta_2+b'_{13}y_0=0 \\ (b'_{21}+\gamma b_{22})\beta_1+(b'_{22}-b_{22})\beta_2+b'_{23}y_0=0 \\ b'_{31}\beta_1+b'_{32}\beta_2+b'_{33}=0. \end{cases}$$

Daher genügen b_{11} und b_{22} beide der in λ quadratischen Gleichung:

$$(19)\quad E(\lambda)=\begin{vmatrix} b'_{11}-\lambda & b'_{12}+\gamma\lambda & b'_{13} \\ b'_{21}+\gamma\lambda & b'_{22}-\lambda & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{vmatrix}=0.$$

2. Entwickelung der quadratischen Gleichung.

Die Differentialquotienten von (19) sind:

$$(20)\quad E'(\lambda)=-\begin{vmatrix} b'_{22}-\lambda & b'_{23} \\ b'_{32} & b'_{33} \end{vmatrix}-2\gamma\begin{vmatrix} b'_{21}+\gamma\lambda & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{33} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} b'_{11}-\lambda & b'_{13} \\ b'_{31} & b'_{33} \end{vmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}E''(\lambda)=b'_{33}(1-\gamma^2).$$

Somit ist:

$$(21)\quad E(\lambda) = E(o) + E'(o)\,\lambda + \tfrac{1}{2} E''(o)\,\lambda^2 = B' - (B'_{11} + B'_{22} - 2B'_{12}\gamma)\,\lambda + b'_{33}(1-\gamma^2)\,\lambda^2 = 0,$$

oder wenn wir die Invarianten (II. § 31, (13)):

$$(22)\quad J = \frac{B'}{S^4},\ J' = \frac{B'_{11} + B'_{22} - 2B'_{12}\gamma}{S^4},\ J'' = \frac{b'_{33}}{S^2}$$

einführen:

$$(23)\quad J''\lambda^2 - J'\lambda + J = 0.$$

Für die Wurzeln λ_1, λ_2 folgt:

$$(24)\quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{B'_0}{S^2 b'_{33}} = \frac{J'}{J''},\ \lambda_1\lambda_2 = \frac{B'}{S^2 b'_{33}} = \frac{J}{J''},$$

wo noch zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(25)\quad B'_0 = B'_{11} + B'_{22} - 2B'_{12}\gamma.$$

3. Kanonische Gleichungen der Mittelpunktskurven.

Die Gleichung der Kurve zweiter Klasse kann stets auf eine der folgenden Formen gebracht werden:

$$(26)\quad \begin{cases} B' \neq 0 : G(u'v's') = S^2(\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + b_{33} s^2) = 0 \\ B' = 0,\ B'_0 \neq 0 : G(u'v's') = S^2(\lambda_2 v^2 + b_{33} s^2) = 0 \\ B' = 0,\ B'_0 = 0,\ b'_{33} \neq 0 : G(u'v's') = S^2 b_{33} s^2 = 0 \end{cases}$$

Die Kurve ist daher entsprechend eine Ellipse oder Hyperbel; oder ein endliches Punktepaar oder ein endlicher Doppelpunkt.

4. Andre Formen der Bedingungen.

Den Bedingungen für das endliche Punktepaar und den Doppelpunkt können wir eine andre Form geben.

Es ist:

$$B'_{11} \cdot B'_{22} - B'^2_{21} = b'_{33} \cdot B'$$

oder, da $B' = 0$:

$$B'_{11} B'_{22} = B'^2_{21}.$$

Hiernach haben B'_{11} und B'_{22} dasselbe Vorzeichen. $B'_{11} + B'_{22}$ kann also nur gleich 0 werden, wenn $B'_{11} = 0$, $B'_{22} = 0$. In diesem Falle ist auch $B'_{21} = 0$. Für $B' = 0$, $B'_{11} + B'_{22} = 0$ muß demnach auch $B'_0 = B'_{11} + B'_{22} - 2 B'_{21} \gamma = 0$ sein.

Weiter wollen wir beweisen, daß die Bedingung $B' = 0$, $B'_{11} + B'_{22} = 0$ für das Verschwinden von B'_0 notwendig und hinreichend ist.

Da $B'_{11} B'_{22} = B'^2_{21}$, so folgt:

$$B'_{11} + B'_{22} \geq 2 B'_{21} .$$

Da ferner $\gamma < 1$, so folgt, daß B'_0 nur gleich 0 sein kann, wenn $B'_{11} = 0$, $B'_{22} = 0$, $B'_{21} = 0$ oder wenn:

$$B' = 0 , \quad B'_{11} + B'_{22} = 0 .$$

Wir setzen jetzt:

(27) $D' = B'_{11} + B'_{22} + B'_{33}$, $D'' = b'_{11} + b'_{22} + b'_{33}$ (vergl. II. § 28,[8]).

Wie in II § 19[2] ist:

$$B' b'_{11} = B'_{22} B'_{33} - B'^2_{23}, \quad B' b'_{22} = B'_{33} B'_{11} - B'^2_{31}, \quad B' b'_{33} = B'_{11} B'_{22} - B'^2_{12}$$

Dann folgt:

$$B'_{11} D' = B'^2_{11} + B'^2_{12} + B'^2_{13} + B' (b'_{22} + b'_{33}),$$
$$B'_{22} D' = B'^2_{21} + B'^2_{22} + B'^2_{23} + B' (b'_{33} + b'_{11}),$$
$$B'_{33} D' = B'^2_{31} + B'^2_{32} + B'^2_{33} + B' (b'_{11} + b'_{22}) .$$

Hieraus ergibt sich durch Addition die identische Gleichung:

$$D'^2 = B'^2_{11} + B'^2_{22} + B'^2_{33} + 2 B'^2_{23} + 2 B'^2_{31} + 2 B'^2_{12} + 2 B'$$

Wenn nun $B' = 0$, $D' = 0$, so verschwinden sämtliche Unterdeterminanten B'_{kl}, somit auch $B'_{11} + B'_{22}$.

Ist umgekehrt $B' = 0$, $B'_{11} + B'_{22} = 0$, so ist:

$$D' = B'_{33}.$$

Für $B' = 0$ ist aber:

$$B'_{22} B'_{33} = B'^2_{23}, \quad B'_{33} B'_{11} = B'^2_{31},$$

folglich auch:

$$(B'_{11} + B'_{22}) B'_{33} = B'^2_{13} + B'^2_{23}.$$

Im Falle $B' = 0$, $B'_{11} + B'_{22} = 0$ ist mithin auch:

$$B'_{13} = 0, \quad B'_{23} = 0.$$

Da $B' = 0$, so gelten folgende Gleichungen ($k = 1,2,3$):

$$b'_{1k} B'_{13} + b'_{2k} B'_{23} + b'_{3k} B'_{33} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt mit $B'_{13} = 0$, $B'_{23} = 0$:

$$b'_{3k} B'_{33} = 0,$$

und unter der Annahme, daß nicht alle b'_{3k} verschwinden:

$$B'_{33} = 0,$$

somit auch:

$$D' = 0.$$

Falls nicht alle b'_{k3} verschwinden, so sind die Bedingungen (26) zweiter und dritter Zeile schließlich ersetzbar durch:

$$B' = 0, \; D' \neq 0 \text{ oder } B' = 0, \; D' = 0.$$

Demnach können wir die Bedingungen (26) auch in folgender Weise schreiben:

$$(28) \begin{cases} B' \neq 0 : G(u' v' s') = S^2 (\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + b_{33} s^2) = 0, \\ B' = 0, \; D' \neq 0 : G(u' v' s') = S^2 (\lambda_1 u^2 + b_{33} s^2) = 0, \\ B' = 0, \; D' = 0, \; b'_{33} \neq 0 : G(u' v' s') = S^2 b_{33} s^2 = 0. \end{cases}$$

Diese Bedingungen sind mit denen im rechtwinkligen Koordinatensystem identisch (vergl. II § 28 (28)).

§ 8. Die Kurven ohne Mittelpunkt.

1. Bestimmung der Hauptachsenrichtungen.

Die Kurven mit unendlich fernem Mittelpunkt sind durch die Voraussetzungen bestimmt:

$$(29) \quad b'_{33} = 0, \quad b'^2_{13} + b'^2_{23} \neq 0 .$$

Bei der Transformation der Gleichung (6) auf ein rechtwinkliges System erhalten die Koefficienten (10) mit (29) folgende Werte:

$$(30) \quad \begin{cases} S^2 b_{13} = G_3 (\alpha_1 \alpha_2 x_0) = b'_{13} \alpha_1 + b'_{23} \alpha_2 , \\ S^2 b_{23} = G_3 (\beta_1 \beta_2 y_0) = b'_{13} \beta_1 + b'_{23} \beta_2 . \end{cases}$$

Wir setzen, da nach (29) nicht beide verschwinden können:

$$(31) \quad S^2 b_{23} = G_3 (\beta_1 \beta_2 y_0) = b'_{13} \beta_1 + b'_{23} \beta_2 = 0 .$$

Mit einem Proportionalitätsfaktor ρ ist alsdann:

$$(32) \quad \rho \beta_1 = - b'_{23}, \quad \rho \beta_2 = + b'_{13} .$$

Mit Rücksicht auf § 1 (11) folgt hieraus:

$$(33) \quad \rho^2 . S^2 = \rho^2 (\beta^2_1 - 2 \gamma \beta_1 \beta_2 + \beta^2_2) \quad b'^2_{23} + 2 \gamma b'_{23} b'_{13} + b'^2$$

Infolge von (29) ist aber:

$$B'_{11} = - b'^2_{23}, \quad B'_{22} = - b'^2_{31}, \quad B'_{12} = b'_{23} b'_{13} .$$

Folglich geht der Wert (33) von $\rho^2 S^2$ über in:

$$(33a) \quad \rho^2 S^2 = - (B'_{11} - 2 \gamma B'_{12} + B'_{22}) = - B'_0 .$$

Mit willkürlicher Verfügung über die Quadratwurzel wird dann:

$$(34) \quad \rho . S = \sqrt{- B'_0} .$$

Die Gleichung (3) läßt sich in folgender Form schreiben:

$$(35) \quad \alpha_1 (\beta_1 - \gamma \beta_2) + \alpha_2 (\beta_2 - \gamma \beta_1) = 0 .$$

Mit (32) folgt hieraus:

$$\alpha_1 (- b'_{23} - \gamma b'_{13}) + \alpha_2 (b'_{13} + \gamma b'_{23}) = 0$$

oder mit einem Proportionalitätsfaktor σ:

(36) $\sigma \alpha_1 = b'_{13} + \gamma b'_{23}$, $\sigma \alpha_2 = b'_{23} + \gamma b'_{13}$.

Mit Rücksicht auf § 1 (11) wird alsdann:

$$S^2 \{(b'_{13} + \gamma b'_{23})^2 + (b'_{23} + \gamma b'_{13})^2 - 2\gamma (b'_{13} + \gamma b'_{23})(b'_{23} + \gamma b'_{13})\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b'^2_{13} + \gamma^2 b'^2_{23} + 2\gamma b'_{13} b'_{23} + b'^2_{23} + \gamma^2 b'^2_{13} + 2\gamma b'_{13} b'_{23} \\ \quad - 2\gamma b'_{13} b'_{23} - 2\gamma^2 b'^2_{13} - 2\gamma^2 b'^2_{23} - 2\gamma^3 b'_{13} b'_{23} \end{array} \right\}$$

$$= \{ b'^2_{13} + b'^2_{23} + 2\gamma b'_{13} b'_{23} - \gamma^2 (b'^2_{13} + b'^2_{23} + 2 b'_{13} b'_{23}) \}$$

$$= S^2 (b'^2_{13} + b'^2_{23} + 2\gamma b'_{13} b'_{23}).$$

(37) $\sigma^2 = b'^2_{13} + b'^2_{23} + 2\gamma b'_{13} b'_{23} = - B'_0$.

Die Richtungskosinus der Hauptachsenrichtungen haben demnach folgende Werte:

8) $$\beta_1 = - \frac{S b'_{23}}{\sqrt{-B'_0}}, \quad \beta_2 = + \frac{S b'_{13}}{\sqrt{-B'_0}}, \quad \alpha_1 = \frac{b'_{13} + \gamma b'_{23}}{\sqrt{-B'_0}}, \quad \alpha_2 = \frac{b'_{23} + \gamma b'_{13}}{\sqrt{-B'_0}}.$$

Für den Koefficienten $S^2 b_{13}$ ergibt sich folgender Wert:

9) $$S^2 b_{13} = b'_{13} \alpha_1 + b'_{23} \alpha_2 = \frac{b'_{13} (b'_{13} + \gamma b'_{23}) + b'_{23} (b'_{23} + \gamma b'_{13})}{\sqrt{-B'_0}}$$

$$= \frac{- B'_0}{\sqrt{-B'_0}} = \sqrt{-B'_0}.$$

2. Bestimmung des Anfangspunktes.

Infolge von (29), (30), (31) wird:

40)
$$\left\{ \begin{array}{l} S^2 b_{11} = G_1 (\alpha_1 \alpha_2 x_0) \alpha_1 + G_2 (\alpha_1 \alpha_2 x_0) \alpha_2 + S^2 b_{13} x_0 \\ = b'_{11} \alpha^2_1 + 2 b'_{12} \alpha_1 \alpha_2 + b'_{22} \alpha^2_2 + 2 S^2 b_{13} x_0; \\ S^2 b_{22} = G_1 (\beta_1 \beta_2 y_0) \beta_1 + G_2 (\beta_1 \beta_2 y_0) \beta_2 \\ = b'_{11} \beta^2_1 + 2'_{12} \beta_1 \beta_2 + b'_{22} \beta^2_2; \\ S^2 b_{12} = G_1 (\beta_1 \beta_2 y_0) \alpha_1 + G_2 (\beta_1 \beta_2 y_0) \alpha_2 = b'_{11} \alpha_1 \beta_1 \\ + b'_{12} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + b'_{22} \beta_2 \alpha_2 + S^2 b_{13} y_0. \end{array} \right.$$

Für den Koordinatenanfangspunkt ist nach § 1 (21):

$$(41)\quad \begin{cases} x_0 = -\alpha_1 x'_0 + \alpha_2 y'_0 , \\ y_0 = -\beta_1 x'_0 - \beta_2 y'_0 . \end{cases}$$

Er bestimmt sich aus den beiden Gleichungen:

$$(42)\quad S^2 b_{11} = 0,\ S^2 b_{12} = 0,$$

die in andrer Schreibweise lauten:

$$(43)\quad \begin{cases} -S^2 b_{13} x_0 = \frac{1}{2}(b'_{11}\alpha^2_1 + 2 b'_{12}\alpha_1\alpha_2 + b'_{22}\alpha^2_2) , \\ -S^2 b_{23} y_0 = b'_{11}\alpha_1\beta_1 + b'_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + b'_{22}\alpha_2\beta_2 . \end{cases}$$

Wird zur Abkürzung gesetzt:

$$(44)\quad H(\alpha_1\alpha_2) = b'_{11}\alpha^2_1 + 2 b'_{12}\alpha_1\alpha_2 + b'_{22}\alpha^2_2 ,$$

und bedeuten:

$$(45)\quad \begin{cases} H_1(\alpha_1\alpha_2) = b'_{11}\alpha_1 + b'_{12}\alpha_2 , \\ H_2(\alpha_1\alpha_2) = b'_{21}\alpha_1 + b'_{22}\alpha_2 \end{cases}$$

die halben partiellen Differentialquotienten von H, setzen wir ferner für x_0, y_0 die Werte (41) ein, so können wir die Gleichungen (43) auch in der Form schreiben:

$$S^2 b_{13}(\alpha_1 x'_0 + \alpha_2 y'_0) = H_1(\alpha_1\alpha_2)\alpha_1 + H_2(\alpha_1\alpha_2)\alpha_2 - \tfrac{1}{2}H(\alpha_1\alpha_2)$$
$$S^2 b_{23}(\beta_1 x'_0 + \beta_2 y'_0) = H_1(\alpha_1\alpha_2)\beta_1 + H_2(\alpha_1\alpha_2)\beta_2 .$$

Diese Gleichungen werden mit A_1, B_1 oder A_2, B_2 multipliziert und addiert. Dann ergibt sich mit Rücksicht auf § 1 (12), (13):

$$S^3 b_{13} x'_0 = S H_1(\alpha_1\alpha_2) - \tfrac{1}{2}A_1 H(\alpha_1\alpha_2) = S H_1(\alpha_1\alpha_2) - \tfrac{1}{2}\beta_2 H(\alpha_1$$
$$S^3 b_{23} y'_0 = S H_2(\alpha_1\alpha_2) - \tfrac{1}{2}A_2 H(\alpha_1\alpha_2) = S H_2(\alpha_1\alpha_2) + \tfrac{1}{2}\beta_1 H(\alpha_1$$

oder mit (38):

$$S^2 b_{13} x'_0 = H_1(\alpha_1\alpha_2) - \frac{b'_{13}}{\sqrt{-B'_0}} H(\alpha_1\alpha_2) ,$$

$$S^2 b_{23} y'_0 = H_2(\alpha_1\alpha_2) - \frac{b'_{23}}{\sqrt{-B'_0}} H(\alpha_1\alpha_2) .$$

Durch Einsetzen des Wertes (39) von $S^2 b_{13}$ folgt aus diesen Gleichungen für die Koordinaten des Anfangspunktes:

$$(46)\quad \begin{cases} x'_0 = \dfrac{H_1(\alpha_1\,\alpha_2)}{\sqrt{-B'_0}} + \dfrac{b'_{13}}{B'_0} H(\alpha_1\,\alpha_2), \\ y'_0 = \dfrac{H_2(\alpha_1\,\alpha_2)}{\sqrt{-B'_0}} + \dfrac{b'_{23}}{B'_0} H(\alpha_1\,\alpha_2). \end{cases}$$

3. Bestimmung des Coefficienten b_{22}.

Die zweiten Gleichungen (40) und (42) können geschrieben werden:

$$S^2 b_{12} = G_1(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\alpha_1 + G_2(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\alpha_2 = 0$$
$$S^2 b_{22} = G_1(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\beta_1 + G_2(\beta_1\,\beta_2\,y_0)\,\beta_2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt wie in (18):

$$G_1(\beta_1\,\beta_2\,y_0) = b_{22}(\beta_1 - \beta_2\,\gamma),$$
$$G_2(\beta_1\,\beta_2\,y_0) = b_{22}(-\beta_1\,\gamma + \beta_2),$$

wozu nach (31)):

$$G_3(\beta_1\,\beta_2\,y_0) = 0.$$

Ausführlich geschrieben lauten die drei Gleichungen:

$$(b'_{11} - b_{22})\,\beta_1 + (b'_{12} + b_{22}\,\gamma)\,\beta_2 + b'_{13}\,y_0 = 0,$$
$$(b'_{21} + b_{22}\,\gamma)\,\beta_1 + (b'_{22} - b_{22})\,\beta_2 + b'_{23}\,y_0 = 0,$$
$$b'_{31}\,\beta_1 + b'_{32}\,\beta_2 = 0.$$

Daher genügt b_{22} der Gleichung:

$$(47)\quad E(\lambda) = \begin{vmatrix} b'_{11} - \lambda & b'_{12} + \gamma\,\lambda & b'_{13} \\ b'_{21} + \gamma\,\lambda & b'_{22} - \lambda & b'_{23} \\ b'_{31} & b'_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt mit der Abkürzung (25):

$$B' - B'_0\,\lambda = 0.$$

Daraus folgt:

$$(48)\quad b_{22} = \lambda = \frac{B'}{B'_0}.$$

4. Kanonische Gleichungen der Kurven mit unendlich fernem Mittelpunkt.

Die Gleichung der Kurve mit unendlich fernem Mittelpunkt kann nach (42), (48), (31), (39) stets auf eine der beiden Formen gebracht werden:

$$(49)\quad \begin{cases} B' \neq 0 : \dfrac{B'}{B'_0} S^2 v^2 + 2\sqrt{-B'_0}\, u s - 0, \\ B' = 0 : \qquad\qquad 2\sqrt{-B'_0}\, u s = 0. \end{cases}$$

Die Kurve ist im ersten Falle eine Parabel, im zweiten Falle ein Punktepaar aus einem endlichen und einem unendlich fernen Punkt.

In beiden Fällen ist nach § 2, 4 auch bezüglich:

$$B' \neq 0 ; B' = 0 , B'_{11} + B'_{22} \neq 0$$

oder:

$$(50)\ B' \neq 0 ; B' = 0 , D' \neq 0 .$$

5. Punktepaare in der unendlich fernen Geraden.

Für den Fall:

$$(51)\ b'_{13} = 0 , b'_{23} = 0 , b'_{33} = 0$$

reduziert sich die Gleichung der Kurve (8) auf die Form:

$$(52)\ G(u' v') = S^2 (b_{11} u^2 + 2b_{12} u v + b_{22} v^2) .$$

Die Koefficienten (40) haben für diese Gleichung folgende Werte:

$$(53\ \begin{cases} S^2 b_{11} = b'_{11} \alpha^2_1 + 2b'_{12} \alpha_1 \alpha_2 + b'_{22} \alpha^2_2 , \\ S^2 b_{22} = b'_{11} \beta^2_1 + 2b'_{12} \beta_1 \beta_2 + b'_{22} \beta^2_2 , \\ S^2 b_{12} = b'_{11} \alpha_1 \beta_1 + b'_{12} (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + b'_{22} \alpha_2 \beta_2 = 0 \end{cases}$$

Mit der Abkürzung (44), (45) schreiben wir die Gleichungen (53) in folgender Zusammenstellung:

$$\begin{cases} H_1 (\alpha_1 \alpha_2) \alpha_1 + H_2 (\alpha_1 \alpha_2) \alpha_2 = S^2 b_{11} , & H_1 (\beta_1 \beta_2) \alpha_1 + H_2 (\beta_1 \beta_2) \alpha_2 = \\ H_1 (\alpha_1 \alpha_2) \beta_1 + H_2 (\alpha_1 \alpha_2) \beta_2 = 0, & H_1 (\beta_1 \beta_2) \beta_1 + H_2 (\beta_1 \beta_2) \beta_2 = S^2 \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Multiplikation mit α_1, β_1 oder α_2, β_2 und Addition:

$$\begin{cases} H_1(\alpha_1\alpha_2) + H_2(\alpha_1\alpha_2)\gamma = S^2 b_{11}\alpha_1, & H_1(\beta_1\beta_2) + H_2(\beta_1\beta_2)\gamma = S^2 b_{22}\beta_1. \\ H_1(\alpha_1\alpha_2)\gamma + H_2(\alpha_1\alpha_2) = S^2 b_{11}\alpha_2; & H_1(\beta_1\beta_2)\gamma + H_2(\beta_1\beta_2) = S^2 b_{22}\beta_2. \end{cases}$$

Durch Multiplikation mit $1, -\gamma$ oder $-\gamma, 1$ und Addition ergibt sich hieraus:

$$\begin{cases} H_1(\alpha_1\alpha_2) = b_{11}(\alpha_1 - \alpha_2\gamma), & H_1(\beta_1\beta_2) = b_{22}(\beta_1 - \beta_2\gamma), \\ H_2(\alpha_1\alpha_2) = b_{11}(-\alpha_1\gamma + \alpha_2); & H_2(\beta_1\beta_2) = b_{22}(-\beta_1\gamma + \beta_2) \end{cases}$$

oder ausführlich geschrieben:

$$(54)\quad \begin{cases} (b'_{11} - b_{11})\alpha_1 + (b'_{12} + b_{11}\gamma)\alpha_2 = 0, & (b'_{11} - b_{22})\beta_1 + (b'_{12} + b_{22}\gamma)\beta_2 = 0, \\ (b'_{21} + b_{11}\gamma)\alpha_1 + (b'_{22} - b_{11})\alpha_2 = 0; & (b'_{21} + b_{22}\gamma)\beta_1 + (b'_{22} - b_{22})\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Daher genügen b_{11} und b_{22} beide der in λ quadratischen Gleichung:

$$(55)\quad \begin{vmatrix} b'_{11} - \lambda & b'_{12} + \gamma\lambda \\ b'_{21} + \gamma\lambda & b'_{22} - \lambda \end{vmatrix} \quad S^2\lambda^2 - (b'_{11} + b'_{22} + 2b'_{12}\gamma)\lambda + B'_{33} = 0.$$

Für die Wurzeln dieser Gleichung gilt:

$$(56)\quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{b'_{11} + b'_{22} + 2b'_{12}\gamma}{S^2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{B'_{33}}{S^2}.$$

Die Gleichung der Kurve läßt sich danach stets auf eine der beiden Formen bringen:

$$(57)\quad \begin{cases} B'_{33} \neq 0 : S^2(\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2) = 0, \\ B'_{33} = 0, \; b'_{11} + b'_{22} + 2b'_{12}\gamma \neq 0 : S^2\lambda_2 v^2 = 0. \end{cases}$$

Da nach (51) $B'_{11} = 0$, $B'_{22} = 0$, so wird:

$$D' = B'_{33}.$$

Danach können wir die Bedingungen (57) ersetzen durch:

$$(58)\quad D' \neq 0; \; D' = 0, \; b'_{11} + b'_{22} + 2b'_{12}\gamma \neq 0.$$

§ 9. Unterscheidung nach dem Vorzeichen der Koefficienten.

1. Kanonische Gleichungen.

Nach den vorstehenden Entwickelungen kann die auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem O x' y' bezogene Gleichung der Kurve (6) durch Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems O x y stets auf eine kanonische Form gebracht werden.

Wir stellen die Ergebnisse unserer Entwickelungen in der nachstehenden Tabelle zusammen:

(59)

	I. $B' \neq 0$. Eigentl. Kurven 2. Kl.	II. $B' = 0$, $D' \neq 0$. Eigentl. Punktep.	III. $B' = 0$, $D' = 0$ Doppelpunkte
1. $b'_{33} \neq 0$.	$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 + J'' s^2 = 0$	$\lambda_2 v^2 + J'' s^2 = 0$	$J'' s^2 = 0$
2. $b'_{33} = 0, B'_{11} + B'_{22} \neq 0$.	$\lambda_1 v^2 + 2\sqrt{-J'}\, u s = 0$	$2\sqrt{-J'}\, u s = 0$	0
3. $b'_{33} = 0, B'_{11} + B'_{22} = 0$.	0	$\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 0$	$\lambda_2 v^2 = 0$

λ_1, λ_2 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung (23)

$$J'' \lambda^2 - J' \lambda + J = 0,$$

und die eingeführten Abkürzungen haben folgende Bedeutung (22), (25), (27):

$$J = \frac{B'}{S^4}, \quad J' = -\frac{B'_0}{S^4}, \quad J'' = -\frac{b'_{33}}{S^2}, \quad B'_0 = B'_{11} + B'_{22} - 2 B'_{12} \gamma,$$

$$D' = B'_{11} + B'_{22} + B'_{33}.$$

Die Vertikalreihen der Tabelle (59) geben die Einteilung nach dem Range, d. h. nach der Anzahl der Doppelgeraden (Doppeltangenten) an (II § 27,[1]); die Horizontalreihen bezeichnen die Einteilung in bezug auf

die unendlich ferne Gerade $u = 0$, $v = 0$, $s = 1$ (II § 27, [2]);

1. $b'_{33} \neq 0$: g ∞ ist keine Tangente der Kurve;
2. $b'_{33} = 0$, $B'_{11} + B'_{22} \neq 0$: g ∞ ist eine einfache Tangente;
3. $b'_{33} = 0$, $B'_{11} + B'_{22} = 0$: g ∞ ist eine Doppeltangente.

2. Die eigentlichen Kurven zweiter Klasse.

In der Gleichung I, 1 der Tabelle (59) setzen wir zur Abkürzung:

$$(60) \quad \alpha = \frac{\lambda_1}{J''}, \quad \beta = \frac{\lambda_2}{J''}.$$

Alsdann lautet jene:

$$(61) \quad \alpha u^2 + \beta v^2 + 1 = 0,$$

worin nach (24):

$$(62) \quad \begin{cases} \alpha + \beta & \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{J''} \quad \dfrac{J'}{J''^2}, \\ \alpha \cdot \beta & \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{J''^2} \quad \dfrac{J}{J''^3}. \end{cases}$$

Die beiden Koefficienten α und β haben demnach folgendes Vorzeichen:

$$(63) \quad \begin{cases} \text{für } J\,J''\,(B'\,b'_{33}) > 0,\ J'\,(B'_0) > 0 : + \quad + \\ \quad J\,J''\,(B'\,b'_{33}) > 0,\ J'\,(B'_0) < 0 : - \quad - \\ \quad J\,J''\,(B'\,b'_{33}) < 0 \qquad\qquad : - \quad + . \end{cases}$$

Wir können diesen Bedingungen eine andere Form geben.

Da $B'\,b'_{33} - B'_{11}\,B'_{22} - B'^2_{12}$, so haben für $B'\,b'_{33} > 0$: B'_{11} und B'_{22} dasselbe Vorzeichen und ist:

$$B'_{11} + B'_{22} > 2\,B'_{12}.$$

Daher lassen sich die Bedingungen (63) auch schreiben:

$$(64) \quad \begin{cases} \text{für } B'\,b'_{33} > 0,\ B'_{11} + B'_{22} > 0 : + \quad + \\ \quad B'\,b'_{33} > 0,\ B'_{11} + B'_{22} < 0 : - \quad - \\ \quad B'\,b'_{33} < 0 \qquad\qquad : - \quad + . \end{cases}$$

Die Kurve ist in den drei Fällen bezüglich eine imaginäre oder reelle Ellipse oder eine Hyperbel.

Die Bedingung zweiter Zeile (64) ist gleichwertig mit (II § 30 (7)):

(65) $B' b'_{33} > 0$; $B' b'_{33}$ und $B'_{11} + B'_{22}$ nicht beide > 0, denn der Fall $B'_{11} + B'_{22} - 0$ ist ausgeschlossen, weil $B' b'_{33} = - B'^2_{11} - B'^2_{12} < 0$ würde, was unmöglich ist.

Die Kurve I, 2 der Tabelle, deren Gleichung geschrieben werden kann:

$$(66) \quad p v^2 + 2 u = 0, \quad p = \frac{J}{J' \sqrt{-J'}}$$

ist eine Parabel. Hier ist $J' (B'_0) < 0$, $J J'' (B' b'_{33}) = 0$.

Die Bedingungen $B'_0 < 0$, $B' b'_{33} = 0$ lassen sich nach § 7[4] ersetzen durch: $B'_{11} + B'_{22} < 0$, $B' b'_{33} = 0$. Demnach sind $B' b_{33}$ und $B'_{11} + B'_{22}$ nicht beide > 0.

Es genügen aber auch schon die Bedingungen der Tabelle (59) $B' \neq 0$, $b'_{33} = 0$, $B'_{11} + B'_{22} \neq 0$, denn für $b'_{33} = 0$ ist $B'_{11} + B'_{22} - b'^2_{13} - b'^2_{23} < 0$ (II § 30[2]).

Unsere Resultate stimmen mit den Kriterien im rechtwinkligen Koordinaten, abgesehen von der veränderten Bezeichnungsweise, vollkommen überein. Die nachstehende Tabelle ist daher auch mit der Tabelle II § 30 (9) identisch.

(67)

	$B' \neq 0$		
	$B' b'_{33} > 0$, $B'_{11} + B'_{22} > 0$		$B' b_{33}$, $B'_{11} + B'_{22}$ nicht beide > 0
$b'_{33} \neq 0$	$B' b'_{33} > 0$	$\alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 + 1 = 0$ Imag. Ellipse	$\alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 - 1 = 0$ Ellipse
	$B' b'_{33} < 0$		$\alpha^2 u^2 - \beta^2 v^2 - 1 = 0$ Hyperbel
$b'_{33} = 0$, $B'_{11} + B'_{22} \neq 0$			$p v^2 + 2 u = 0$ Parabel

Die Gleichung II, 1:

$$(68)\quad \lambda_2 v^2 + J'' s^2 = 0,\ J''(b'_{33}) \neq 0,\ J(B') = 0,\ D' \neq 0;\ \lambda_2 = \frac{J'}{J''}$$

stellt ein imaginäres oder reelles Punktepaar auf der y-Achse dar, je nachdem:

$$(69)\quad J'(B'_0) > 0 \text{ oder } J'(B'_0) < 0,$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$(70)\quad B'_{11} + B'_{22} > 0 \text{ oder } B'_{11} + B'_{22} < 0.$$

Nun ist nach II § 19,[2] mit $B' = 0$:

$$B'_{11} D' = B'^2_{11} + B'^2_{12} + B'^2_{13}.$$
$$B'_{22} D' = B'^2_{21} + B'^2_{22} + B'^2_{23}.$$

Mithin müssen D' und $B'_{11} + B'_{22}$, falls sie nicht 0 sind, dasselbe Vorzeichen haben. Statt (70) kann also gesetzt werden:

$$(71)\quad D' > 0 \text{ oder } D' < 0.$$

Die Gleichung II, 2:

$$(72)\quad 2\sqrt{-J'}\, u s = 0$$

stellt einen endlichen ($s = 0$) und einen unendlich fernen Punkt ($u = 0$) dar. Für sie ist $J'(B'_0) < 0$, wofür auch geschrieben werden kann $B'_{11} + B'_{22} < 0$ oder $D' < 0$.

Es bleibt noch die Gleichung II, 3:

$$(73)\quad \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 0,$$

worin nach (56):

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{B'_{33}}{S^2},\ \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{b'_{11} + b'_{22} + 2 b'_{12} \gamma}{S^2}.$$

Die Gleichung (73) stellt ein imaginäres oder reelles Punktepaar dar, je nachdem:

$$(74)\quad B'_{33} > 0 \text{ oder } B'_{33} < 0.$$

Für die Punktepaare erhalten wir also die folgende Tabelle, die mit der Tabelle II § 30 (16) übereinstimmt:

(75)

	$B' = 0,\ D' \neq 0.$ $B'_{11} + B'_{22}(B'_{33}) > 0$	$B' = 0,\ D' \neq 0.$ $B'_{11} + B'_{22}(B'_{33}) < 0$
$b'_{33} \neq 0$	$\beta^2 v^2 + 1 = 0$ Imag. endl. Punktepaar	$\beta^2 v^2 - 1 = 0$ Reell. endl. Punktepaar
$b'_{33} = 0,\ B'_{11} + B'_{22} \neq 0$		$u \,.\, s = 0$ endl. u. ∞ fern. Punkt
$b'_{33} = 0,\ B'_{11} + B'_{22} = 0$	$\alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 = 0$ Imag. ∞ fernes Punktep.	$\alpha^2 u^2 - \beta^2 v^2 = 0$ Reell. ∞ fern. Punktep.

So lange $B'_{11} + B'_{22} \neq 0$, soll in $B'_{11} + B'_{22}(B'_{33}) \gtrless 0$: $B'_{11} + B'_{22}$ gelten; wird $B'_{11} + B'_{22} = 0$, so soll für $B'_{11} + B'_{22} : B'_{33}$ eintreten.

4. Vergleich der Plückerschen Kriterien mit den gewonnenen Resultaten.

1. Eigentliche Kegelschnitte ($B \neq 0$).

Die Bedingung bei Plücker $B_{22} \gtrless 0$ kann durch $B_{11} + B_{22} \gtrless 0$ ersetzt werden. Die gemeinsame Bedingung für die imaginäre und reelle Ellipse ist nämlich $b_{33} \,.\, B > 0$. Wie aus der Gleichung $B_{11} \,.\, B_{22} - B^2_{12} = b_{33} B$ folgt, müssen demnach B_{11} und B_{22} für diese Kurven das gleiche Vorzeichen haben. Für die Hyperbel ($b_{33} B < 0$) ist das Vorzeichen von B_{22} in der Plückerschen Tabelle beliebig ebenso wie in unsrer Tabelle das Vorzeichen von $B'_{11} + B'_{22}$. Schließlich für die Parabel ($b_{33} = 0$) müssen wiederum nach der Gleichung $B_{11} B_{22} - B^2_{12} = b_{33} B = 0 : B_{11}$ und B_{22} dasselbe Vorzeichen haben, so daß für $B_{22} < 0$ also $B_{11} + B_{22} < 0$ eintreten kann.

2. Punktepaare ($B = 0$).

Statt der Bedingungen $B_{22} \gtrless 0$ können die Bedingungen $B_{11} + B_{22} \gtrless 0$ gesetzt werden, wie auch hier aus der Gleichung $B_{11} B_{22} - B^2_{12} = b_{33} B = 0$ folgt.

Die Bedingungen $b_{13} \neq 0$, $b_{23} \neq 0$ und $b_{13} = 0$, $b_{23} = 0$ können durch $B_{11} + B_{22} \neq 0$ und $B_{11} + B_{22} = 0$ ersetzt werden, da für $b_{33} = 0$: $B_{11} + B_{22} = - b^2_{13} - b^2_{23}$.

Die vorliegende Arbeit habe ich auf Anregung und unter Leitung von Herrn Professor Dr. Staude angefertigt.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Herrn Professor Dr. Staude für die mir in liebenswürdiger Weise gewährte Unterstützung meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Ich, Friedrich Tönnies Voß, evangelisch lutherischer Konfession, wurde am 30. Januar 1887 als Sohn des Kapitäns Friedrich Voß zu Wustrow i. Meckl. geboren. Zunächst besuchte ich das Realprogymnasium zu Ribnitz, alsdann das Realgymnasium zu Rostock und wurde von letzterer Anstalt Ostern 1905 mit dem Zeugnis der Reife entlassen, um mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften zu widmen. Ich studierte von Ostern 1905 bis Ostern 1907 in Rostock, sodann in München und von Ostern 1908 wieder in Rostock, wo ich am 24. und 25. Juni das Staatsexamen bestand. Nachdem ich vom 1. Oktober 1909 bis zum 1. Oktober 1910 meiner Militärpflicht genügt hatte, wurde ich als Seminarkandidat dem Realgymnasium zu Malchin überwiesen. Am 29. Juli 1912 bestand ich in Rostock das Examen rigorosum. Meine akademischen Lehrer waren u. a. in Rostock: Staude, Heydweiller, Geinitz, Michaelis, Dieterici, Erhardt und Weber; in München: Lindemann, Voß, Lipps und Grätz.

Ihnen allen, besonders meinen Rostocker Lehrern, sage ich meinen herzlichen Dank.